BIBLIOTHÈQUE DE L'ENSEIGNEMENT SCIENTIFIQUE
Directeur : L. PASTOURIAUX, Inspecteur général de l'Éducation Nationale.

ÉCOLES NATIONALES PROFESSIONNELLES

R. BASQUIN A. MÉTRAL

MÉCANIQUE

PREMIÈRE PARTIE

LIBRAIRIE DELAGRAVE
15, Rue Soufflot, Paris

A LA MÊME LIBRAIRIE

Sections préparatoires aux Écoles d'enseignement technique

Initiation à l'étude de l'algèbre, par R. CLUZEL et J.-P. ROBERT. Un volume (15 × 20), illustré, cartonné.

Écoles nationales professionnelles, Écoles pratiques, Enseignement moderne, Cours complémentaires.

Arithmétique et notions d'algèbre, par R. CLUZEL et H. COURT. Un volume (15 × 20), illustré, cartonné.

Algèbre, par R. CLUZEL et H. COURT. Un volume (15 × 20), illustré, cartonné.

La Géométrie et ses applications, par R. CLUZEL et J.-P. ROBERT. Un volume (15 × 20), illustré, cartonné.

Géométrie, par R. CLUZEL et J.-P. ROBERT. *1re partie.* Livres I et II. Un volume (15 × 20) illustré, cartonné.

— *2e partie.* Livres III et IV. Trigonométrie. Un volume (15 × 20), illustré, cartonné.

— *3e partie.* Livres V, VI et VII. Un volume (15 × 20), illustré, cartonné.

— *4e partie.* Livre VIII. Hélice. Roulettes. Trigonométrie. Un volume (15 × 20), illustré, cartonné.

Chimie, par L. PASTOURIAUX et H. VALDENAIRE. Un volume (15 × 20), illustré, cartonné.

Mécanique expérimentale, 1er livre, par R. BASQUIN. Un volume (15×20), illustré, cartonné.

Mécanique, par R. BASQUIN et MÉTRAL. *1re partie* (*3e année des E. N. P.*). Un volume (15 × 20), illustré, cartonné.

Mécanique, par R. BASQUIN. *2e partie* (*4e année des E. N. P.*). Un volume (15 × 20), illustré, cartonné.

Notions de chimie générale, par L. PASTOURIAUX et H. VALDENAIRE (*1re et 2e années des E. N. P.*). Un volume (15 × 20), illustré, cartonné.

Notions de chimie industrielle, par P. LIGNON. Un volume (15 × 20), illustré, cartonné.

Électricité industrielle, par L. PASTOURIAUX et H. VAROQUAUX (*2e et 3e années des E. N. P.*). (Courant continu). Un volume (15 × 20), illustré, cartonné.

4e année des E. N. P. (Courant alternatif). Un volume (15 × 20), illustré, cartonné.

Écoles supérieures de commerce. Enseignement commercial.

Mathématiques commerciales et financières, par H. FUZET et H. COURT. Un volume cartonné, illustré.

BIBLIOTHÈQUE DE L'ENSEIGNEMENT SCIENTIFIQUE

Directeur :

L. PASTOURIAUX, Inspecteur général de l'Éducation nationale.

MÉCANIQUE

Ire Partie

à l'usage des Écoles nationales professionnelles
(3e Année)

par

R. BASQUIN
Professeur à l'École pratique d'industrie
de Suresnes et à l'École nationale supérieure
de céramique de Sèvres

A. MÉTRAL
Ingénieur des Mines,
Professeur au Conservatoire national
des Arts et Métiers et à l'École de l'Air.

QUARANTE ET UNIÈME MILLE

PARIS
LIBRAIRIE DELAGRAVE
15, RUE SOUFFLOT, 15
1946

Tous droits de reproduction, de traduction et d'adaptation
réservés pour tous pays, y compris l'U. R. S. S.

Copyright by Librairie Delagrave, 1939.
Printed in France.

SYMBOLES DE GRANDEURS ET D'UNITÉS

Règles relatives à leur emploi.

D'après les normes éditées par l'AFNOR.
(*Association Française de Normalisation*, 23, r. Notre-Dame-des-Victoires, Paris-2e.)

1. Manière d'écrire les nombres.

1° *Nombres entiers :* séparer les tranches de 3 chiffres, à partir de la droite, par un espace blanc et non par un point.

EXEMPLE : *18 752* et non 18.752

2° *Nombres fractionnaires :* séparer la partie décimale de la partie entière par une virgule ; séparer les tranches de 3 chiffres, à partir de la virgule, par un espace blanc et non par un point.

EXEMPLES : *0,527 12* et non 0,527.12
3 451,25 et non 3.451,25

3° Écrire sur la même ligne et avec les mêmes caractères tous les chiffres d'un nombre entier ou fractionnaire.

EXEMPLE : *26,25* et non $26,^{25}$ (les nombres décalés vers le haut représentent des exposants).

4° Éviter d'écrire les parties fractionnaires sous forme de fraction.

EXEMPLES : *0,75* et non $\frac{3}{4}$; *3,50* et non $3\frac{1}{2}$.

2. Symboles mathématiques.

$\simeq$ égale environ	% pour cent
$\neq$ différent de	‰ pour mille.

Le signe de la multiplication est représenté par un point ou par $\times$.
Le signe de la division est représenté par : ou une barre de fraction —, ou une barre inclinée /.

3. Symboles de grandeurs mécaniques.

temps	t	travail	A
vitesse linéaire	v	énergie	W
vitesse angulaire	ω ou Ω	puissance	P
accélération	γ	rendement	η
vitesse relative	w	pression	p
vitesse d'entraînement	u	force	F
masse	m	moment d'une force ou d'un couple.	$\mathfrak{M}$

4. Symboles d'unités principales.

Unité de longueur : le mètre ..... m
Unité de surface : le mètre carré ..... m^2

Unités de volume : le mètre cube..... m^3
le litre (1 décimètre cube)..... l
(Pour former les noms des multiples et sous-multiples de ces unités, consulter le paragraphe suivant : symboles des préfixes.

Unités de temps : l'heure..... h
la minute..... mn
la seconde..... s
On écrira : *9 h 14 mn 7 s* pour 9 heures 14 minutes 7 secondes.

Unités d'angles :

Angle droit	D	Minute.....	$'$
Grade.....	gr	Seconde.....	$''$
Degré.....	d ou $°$	Tour.....	tr ou t
Radian.....	r		

Unités de masse : le gramme-masse..... g
le kilogramme-masse..... kg
la tonne-masse..... t

Unités de force : le sthène..... sn
le kilogramme-poids. Aucun symbole n'étant prévu par l'AFNOR, nous adoptons, (pour distinguer cette unité du kilogramme-masse)..... kgp

REMARQUE. — Nous arrêtons ici cette énumération. Au cours des leçons qui vont suivre, nous indiquerons, lorsqu'il y aura lieu, les symboles des autres unités à mesure que nous les définirons.

5. Symboles des préfixes.

Les préfixes s'écrivent immédiatement avant le nom de l'unité, sans espace ni séparation.

MULTIPLES				SOUS-MULTIPLES			
Valeurs		Noms	Symb.	Valeurs		Noms	Symb.
10^1	 10	déca	*da*	10^{-1}	0,1.....	déci	*d*
10^2	 100	hecto	*h*	10^{-2}	0,01.....	centi	*c*
10^3	..... 1 000	kilo	*k*	10^{-3}	0,001	milli	*m*
10^4	..... 10 000	myria	*ma*	10^{-4}	0,000 1	décimilli	*dm*
10^5	..... 100 000	hectokilo	*hk*	10^{-5}	0,000 01	centimilli	*cm*
10^6	.... 1 000 000	méga	*M*	10^{-6}	0,000 001....	micro	μ

6. Règles pour l'emploi et la formation des symboles.

1re Règle. — Écrire les symboles sans point final (sauf lorsque le symbole termine une phrase) et sans *s* au pluriel; la lettre *s* étant réservée pour les secondes de temps.

EXEMPLE : Écrire *12 kg* et non 12 *kgs* ou 12 *kg.*

2e Règle. — Ne pas séparer le symbole du préfixe de celui de l'unité.

EXEMPLE : Écrire *8 mm* et non 8 *m/m* ou 8*m.m*

3e Règle. — Lorsqu'une grandeur est le *produit* de deux autres grandeurs :

1° *Pour former son nom :* on accole ou on réunit par un tiret les noms des unités composantes.

2° *Pour former son symbole :* on accole les symboles de chaque unité composante, soit sans séparation, soit séparés par un point.

REMARQUE. — Pour distinguer la grandeur : *Moment d'une force* de la grandeur : *Travail d'une force,* on considère la première comme le produit d'une longueur par la force, et la seconde comme le produit de la force par une longueur.

4e Règle. — Lorsqu'une grandeur est le *quotient* de deux autres grandeurs, on sépare les deux symboles par une barre inclinée, signe de la division.

Exemples : vitesse en *km/h ;* pression en kg/cm^2.

5e Règle. — Lorsqu'une grandeur est à la fois le produit et le quotient d'autres grandeurs, on applique les deux règles précédentes.

EXEMPLE : puissance d'un moteur en *kg.m/s.*

6e Règle. — Inscrire les symboles *après* les nombres.

EXEMPLES : Écrire *2,50 m* et non 2, *m* 50

3,750 kg et non 3, *kg* 750

Alphabet grec.

Figure.	Nom.	Valeur.
A α,	Alpha,	a.
B β ϐ,	Bêta,	b, v.
Γ γ,	Gamma,	g.
Δ δ,	Delta,	d.
E ε,	Epsilon,	e *bref*,
Z ζ,	Zêta,	z, ds.
H η,	Éta,	ê *long*.
Θ θ ϑ,	Thêta,	th.
I ι,	Iota,	i.
K κ,	Cappa,	c, k.
Λ λ,	Lambda,	l.
M μ,	Mu,	m.

Figure.	Nom.	Valeur.
N ν,	Nu,	n.
Ξ ξ,	xi,	x, cs, gs.
O ο,	Omicron,	o *bref*.
Π π ϖ,	Pi,	p.
P ρ,	Rho,	r.
Σ σ ς,	Sigma,	s.
T τ,	Tau,	t.
Υ υ,	Upsilon,	y, u *bref*.
Φ φ,	Phi,	ph.
X χ,	Chi,	ch.
Φ ψ,	Psi,	ps, bs.
Ω ω,	Oméga,	ô *long*.

I. CINÉMATIQUE

1re LEÇON

Généralités.

I. — DIVISIONS DE LA MÉCANIQUE

La Mécanique comprend la *Cinématique*, la *Statique* et la *Dynamique*.

1° ***La Cinématique*** traite des rapports entre les mouvements et le temps, indépendamment des causes qui provoquent ces mouvements.

2° ***La Statique*** étudie les conditions d'équilibre des corps.

3° ***La Dynamique*** recherche les lois qui lient les mouvements aux forces qui les provoquent.

II. DÉFINITION DU MOUVEMENT. TRAJECTOIRE D'UN POINT

1. Définition du mouvement d'un corps.

Les différents points du sol sont à des *distances mutuelles invariables* On dit que le *sol* est un *système invariable*.

Les maisons, les bornes kilométriques d'une route, sont à des *distances invariables d'un point quelconque du sol*. Ce sont des corps *immobiles*, ou *fixes*, ou *en repos, par rapport au sol*.

Au contraire, l'avion en vol, l'automobile en marche (fig. 1) sont *en mouvement par rapport au sol*, parce que leurs distances à un point quelconque du sol varient avec le temps.

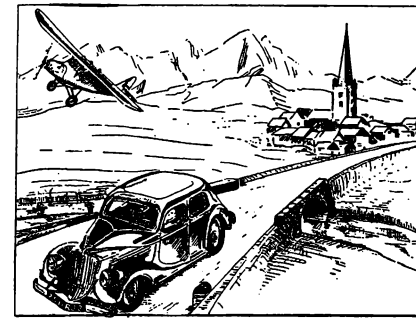


Fig. 1. — L'automobile, l'avion sont en mouvement par *rapport au sol*. A quoi le reconnaît-on?

D'une manière générale, ***un corps est en mouvement par***

rapport à un système invariable, lorsque les distances qui le séparent d'un point quelconque de ce système varient avec le temps.

Dans les mouvements que nous étudierons, le sol sera considéré comme invariable : autrement dit nous étudierons les mouvements des corps par rapport au sol.

2. Trajectoire d'un point.

a) L'extrémité M de la mine pointue d'un crayon peut être considérée comme un point.

Sur une feuille de papier traçons une ligne quelconque (fig. 2). Elle représente l'ensemble des positions occupées successivement par le point M. C'est la ***trajectoire*** de ce point dans le mouvement qui l'amène de A en B.

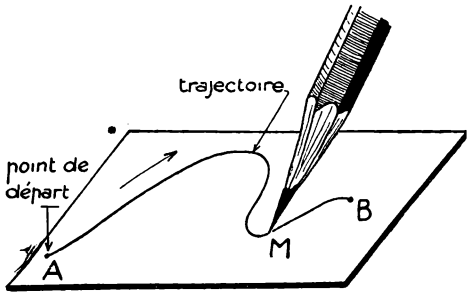


Fig. 2. — La ligne AB, trace du crayon sur la feuille de papier, est la **trajectoire** du point M.

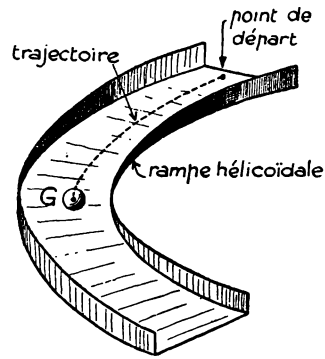


Fig. 3. — La **trajectoire** du point G est la ligne qui joint d'une manière continue les positions successives du point G dans l'espace.

b) Laissons rouler une bille d'acier sur une rampe hélicoïdale (fig 3). Son centre G décrit dans l'espace une trajectoire, mais contrairement à l'expérience précédente, il n'en demeure aucune trace.

DÉFINITION. — ***On appelle trajectoire d'un point mobile la ligne qui joint, d'une manière continue, les différentes positions prises par ce point au cours de son déplacement.***

3. Quelques exemples de trajectoires.

La trajectoire du grain de poussière

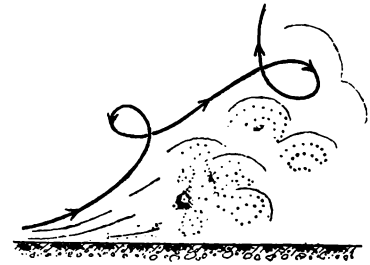


Fig. 4. — La trajectoire d'un grain de poussière est une courbe quelconque.

emporté par un tourbillon de vent est une courbe quelconque, sans définition géométrique possible (fig. 4).

Pratiquement, nous pouvons observer les trajectoires suivantes :

1° ***La droite.*** — Telle est la trajectoire d'un point quelconque A d'un coulisseau qui se meut sur une glissière

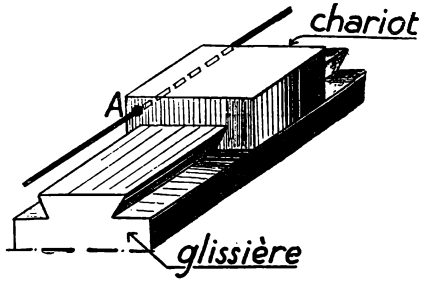


Fig. 5. — La trajectoire du point **A** du chariot est une **droite.**

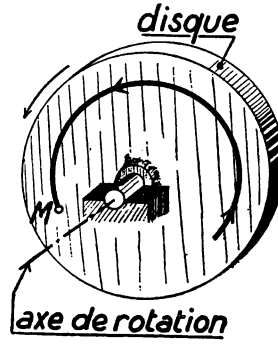


Fig. 6. — La trajectoire du point M est une **circonférence.**

fixe (fig. 5), d'un piston ou de sa tige, d'un plateau de raboteuse : *cette trajectoire est rectiligne.*

2° ***La circonférence.*** — Un point quelconque M, d'un corps tournant autour d'un axe fixe décrit une *trajectoire circulaire* (fig. 6).

Il en est ainsi pour tous les points d'une poulie, d'un volant, d'une manivelle, d'un rotor d'alternateur, d'une roue de turbine.

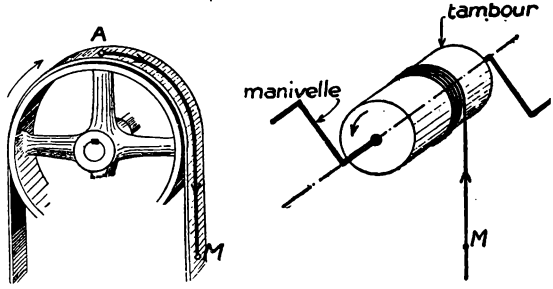


Fig. 7 et 8. — Un point de la courroie ou du câble a, tantôt un mouvement circulaire, tantôt un mouvement rectiligne.

REMARQUE. — En période de fonctionnement, un point de la courroie qui commande une poulie, du câble qui s'enroule sur le tambour d'un treuil, a, tantôt une trajectoire rectiligne, tantôt une trajectoire circulaire (fig. 7 et 8).

3° ***La cycloïde.*** — C'est la trajectoire d'un point de la périphérie d'une roue qui *roule sans glisser* sur un rail rectiligne (fig. 9). Après un tour de roue, le point M a décrit une arche de cycloïde.

4° ***La parabole.*** — Le centre d'une bille d'acier lancée sur une

table décrit d'abord une droite, puis, lorsque la bille quitte la table, une *parabole* (fig. 10). C'est sur une parabole que se déplace le centre d'une balle de tennis projetée d'un coup de raquette.

La figure 11 matérialise la parabole. L'ensemble du filet liquide est

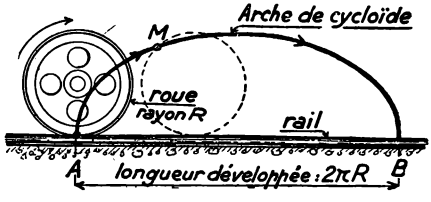


Fig. 9. — Le point A de la roue décrit une **cycloïde.**

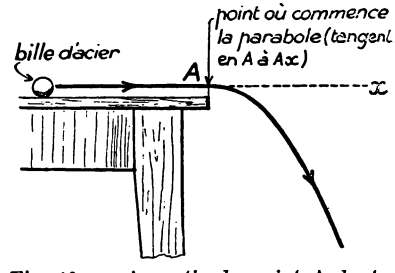


Fig. 10. — A partir du point A, la trajectoire du centre de la bille est une **parabole.**

assimilable à une suite ininterrompue de particules qui empruntent la même trajectoire.

5° ***L'ellipse.*** — La figure 12 rappelle le procédé employé par le jardinier pour tracer une ellipse d'une manière continue. Cette courbe est le lieu géométrique des points d'un plan dont la somme des distances a deux points fixes A et B de ce plan est constante.

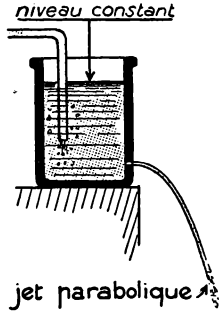


Fig. 11. — Le jet d'eau a la forme d'une parabole.

6° ***La développante de cercle.*** — Cette courbe se définit mécaniquement de la manière suivante :

Fixons en A, sur le pourtour d'un disque, un fil flexible (fig. 13). A son extrémité libre, attachons un crayon finement taillé. Le disque est posé à plat sur une feuille de papier. Enroulons le fil sur sa circonférence, puis déroulons-le en le maintenant tendu. La mine, perpendiculaire au papier, trace une *développante de cercle.*

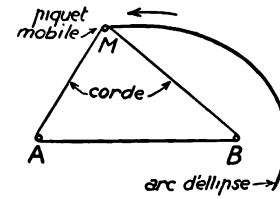


Fig. 12. — La longueur de la corde est constante. La pointe du piquet mobile décrit une **ellipse.**

7° ***L'hélice.*** — Tout point d'un écrou tournant sur sa vis, ou d'une vis tournant dans son écrou décrit une hélice (fig. 14). Nous reprendrons plus loin la définition de cette courbe (15e Leçon).

REMARQUE. — La droite, la circonférence, la cycloïde, la parabole, l'ellipse, la développante de cercle sont entièrement décrites dans un plan : ce sont des *courbes planes*. Au contraire, l'hélice dont les points

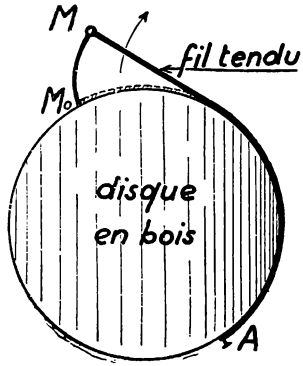


Fig. 13. — L'extrémité M du fil décrit une **développante de cercle.**

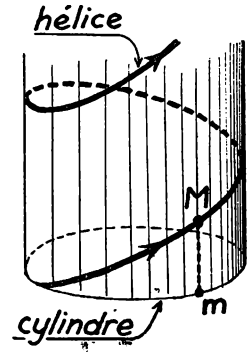


Fig. 14. — Le point mobile M décrit une **hélice.**

ne sont pas situés dans un plan puisqu'ils appartiennent à la surface d'un cylindre, est dite *courbe gauche*.

4. Mouvement continu et mouvement alternatif.

Un mouvement est ***continu*** lorsqu'il a lieu dans le même sens pendant

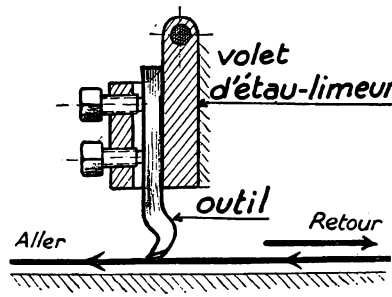


Fig. 15. — La pointe de l'outil a un mouvement **rectiligne alternatif.**

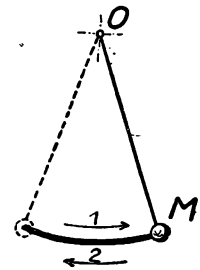


Fig. 16. — Le mouvement du pendule est **circulaire alternatif.**

toute sa durée. La chute libre d'une pierre abandonnée à elle-même donne l'image d'un mouvement rectiligne continu; la rotation d'une meule, celle d'un mouvement circulaire continu.

Si le mouvement a lieu tantôt dans un sens, tantôt en sens contraire, il est ***alternatif;*** on peut alors distinguer *l'aller* et *le retour*. Le mouvement d'une tête d'étau-limeur est rectiligne alternatif (fig. 15), celui d'un pendule est circulaire alternatif (fig. 16).

La plupart des mouvements rectilignes des machines sont alternatifs et la plupart des mouvements circulaires sont continus.

5. Comment on étudie le mouvement d'un point : origine des temps, origine des espaces.

Pour être exactement fixé sur le voyage d'un cycliste, il faut :

1° connaître sa route;

2° pouvoir dire : à telle heure, il est à tel endroit.

De même, pour être bien renseigné sur le mouvement d'un point mobile il faut :

1° connaître sa trajectoire : c'est, par exemple, une droite;

2° pouvoir dire : à telle heure, il est à tel endroit.

Dans la vie courante nous comptons toujours les heures à partir de 0 *heure* (instant où commence le jour que nous vivons); et il nous suffit de lire sur le cadran d'une montre, par exemple, pour savoir l'heure.

Mais il arrive qu'on se serve aussi d'un chronomètre. Ainsi, le starter qui dirige une course à pied, déclenche son chronomètre juste à l'instant

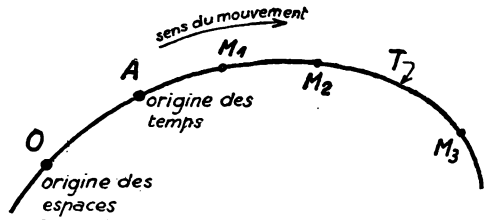


Fig. 17. — Les points A, M_1, M_2, M_3 sont les positions du mobile aux instants 0*s*, 1*s*, 2*s*, 3*s*.

où il donne le signal du départ; et il compte les temps : 0, 1 *s*, 2 *s*, 3 *s*... à partir de l'instant du signal (instant 0) appelé aussi ***origine des temps.***

Nous procéderons souvent ainsi : nous choisirons l'origine des temps, comme nous voudrons, pour de simples raisons de commodité.

Pour fixer la position du mobile sur sa trajectoire, nous opérerons comme pour une course à pied : nous choisirons un point de repère, fixe sur la trajectoire; et nous indiquerons la distance du point mobile à ce repère que nous appellerons : ***origine des espaces*** (fig. 17).

Si nous connaissons bien le mouvement du mobile, nous pourrons donc dresser, par exemple, le tableau suivant :

Temps (compté à partir de l'origine des temps)			Distances du mobile (comptées à partir de l'origine des espaces)	
0	*seconde*	.....	5	*mètres*
1	—	.....	6	—
2	—	.....	8	—
3	—	.....	12	—
4	—	.....	20	—
.....				

La distance du mobile à l'origine des espaces est dite : ***espace parcouru.*** Nous représenterons par e_t l'espace parcouru à l'instant t. Ainsi, dans l'exemple précédent nous avons :

$$e_1 = 6 \text{ mètres}; \qquad e_2 = 8 \text{ mètres}; \text{ etc.}$$

Il est clair que l'espace parcouru varie d'un instant à l'autre : c'est une *fonction du temps.*

REMARQUE. — L'espace e_0 parcouru à l'intant 0 — c'est-à-dire la distance à laquelle le mobile se trouve de l'origine des espaces, à cet instant 0 — est appelée ***espace initial.*** Ainsi, dans le cas précédent

$$e_0 = 5 \text{ mètres}.$$

Très souvent, on choisit pour origine des espaces, juste le point de la trajectoire où le mobile est à l'instant 0. On a alors : $e_0 = 0$, ce qui simplifie les calculs.

Résumé.

1. Des points sont fixes les uns par rapport aux autres quand leurs distances mutuelles sont invariables.

2. Un point est en mouvement par rapport à des points fixes, pris comme repères, lorsque sa distance à l'un quelconque d'entre eux varie avec le temps.

3. On appelle *trajectoire* d'un point la ligne qui joint d'une manière continue les positions successives prises par ce point au cours de son déplacement.
Les trajectoires usuelles sont : la *droite*, la *circonférence*, l'*ellipse*, la *parabole*, la *cycloïde*, *l'hélice*.

4. Le mouvement d'un point peut être *continu* ou *alternatif*.
Dans les machines la plupart des mouvements rectilignes sont alternatifs et la plupart des mouvements circulaires sont continus.

5. Sur la trajectoire d'un point on peut marquer :

1° *l'origine des espaces; point fixe choisi à volonté;*

2° *le point où le mobile se trouve à l'origine des temps.*
La longueur de la portion de trajectoire qui les sépare est dite *espace initial.*

6. A un instant t le point mobile est à une certaine distance de l'origine des espaces : cette distance, mesurée sur la trajectoire, est dite *espace parcouru à l'instant t.* On le représente par e_t.

Exercices.

1. Au cours d'une visite à l'atelier on notera sur une machine, telle qu'un étaulimeur :

1° les organes mobiles dont les points ont des trajectoires rectilignes, circulaires, hélicoïdales;

2° les organes dont les mouvements sont continus ou alternatifs;

3° les organes qui présentent des périodes de repos alternant avec des périodes de mouvement.

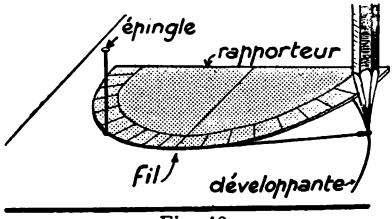


Fig. 18.

2. Quelle est la trajectoire d'un point de la périphérie d'une roue de bicyclette :

1° *par rapport au sol : a*) quand la roue tourne, la bicyclette soulevée restant immobile; — *b*) quand la bicyclette se déplace en ligne droite?

2° *par rapport au cadre de la bicyclette* considérée comme système invariable, dans les deux cas précédents?

3. A l'aide d'un rapporteur d'angles (celluloïd) posé à plat sur une planche à dessin, tracer une développante de cercle (voir fig. 18).

4. La parabole passant par un point M donné et tangente en A à une droite donnée D s'obtient par la construction de la figure 19.

Démontrer que les distances des points 1, 2, 3, 4, 5 de AD aux points correspondants de la parabole sont entre elles comme les nombres entiers 1, 4 ou 2^2, 9 ou 3^2, 16 ou 4^2, 25 ou 5^2.

Soit A le point où une petite bille d'acier quitte la table sur laquelle elle vient de rouler (fig. 10). Elle atteint le sol en un point M. Tracer la trajectoire du centre de la bille.

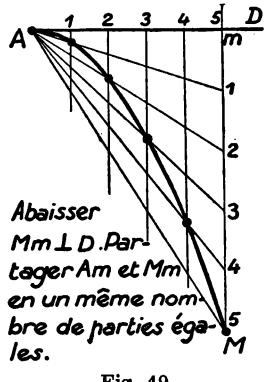


Fig. 19.

5. Soit *m* la projection du point M sur le plan de base du cylindre de la figure 14. Lorsque M décrit l'hélice, quelle est la trajectoire du point *m*?

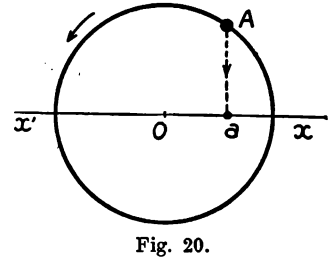


Fig. 20.

6. Le mouvement d'un point A est circulaire continu (fig. 20). Que dire du mouvement du point *a* projection de A sur le diamètre *x x'*?

Mouvement rectiligne uniforme d'un point.

1. Exemple de mouvement rectiligne uniforme. Définition.

Un piéton marche sur une route *droite*. Il met constamment 70 *secondes* pour franchir l'intervalle de 100 *mètres* qui sépare 2 bornes hectométriques. Si l'on place des jalons espacés de 10 *mètres* en 10 *mètres*, il met toujours 7 *secondes* pour aller de l'un à l'autre.

Ce piéton parcourt donc des distances égales en des temps égaux : son mouvement est *uniforme*.

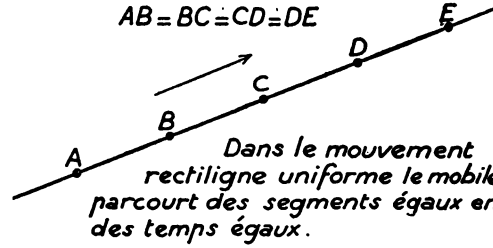


Fig. 1.

DÉFINITION. — ***Le mouvement d'un point est rectiligne uniforme s'il parcourt sur une droite, toujours dans le même sens, des espaces égaux en des temps égaux, quels que soient ces temps*** (fig. 1).

I. — LOIS DU MOUVEMENT

2. Loi des espaces du mouvement uniforme.

Il résulte de la définition même du mouvement uniforme que si le temps devient 2, 3, 4,... *n* fois plus grand, l'espace parcouru devient aussi 2, 3, 4,... *n* fois plus grand.

Autrement dit : ***dans tout mouvement uniforme, l'espace parcouru est proportionnel au temps employé à le parcourir.*** Cet énoncé constitue la *loi des espaces*.

3. Loi des vitesses dans le mouvement uniforme.

D'après ce qui précède, ***dans tout mouvement uniforme, le quotient de l'espace parcouru par le temps mis à le parcourir est constant.***

Par définition, ce quotient est la ***vitesse*** du mouvement. On la désigne habituellement par les lettres ***v*** ou ***V***

EXEMPLE. — *Un piéton parcourt* 13,5 *km en* 2 *h* 20 *mn d'un mouvement uniforme. Quelle est sa vitesse ?*

L'espace parcouru est 13,5 *km* ou 13 500 mètres. Le temps employé à le parcourir est 2 *h* 30 *mn* ou 150 *minutes* ou 150 × 60 = 9 000 *secondes*. La vitesse est :

$$v = 13\,500 : 9\,000 = \textbf{\textit{1,5 mètres par seconde.}}$$

REMARQUE 1. — Ce nombre 1,5 mesure, en *mètres*, l'espace parcouru pendant l'*unité de temps*, ici la *seconde;* c'est pourquoi l'on dit souvent : *la vitesse d'un mouvement uniforme est l'espace constant parcouru pendant chaque unité de temps.*

Cette expression est incorrecte, parce que *la vitesse n'est pas une grandeur de même nature qu'une longueur;* ce n'est pas une longueur, mais le quotient d'une longueur par un temps.

REMARQUE 2. — La vitesse s'exprime généralement en *mètres par seconde* (***m/s***). Mais on peut aussi l'évaluer en *mètres par minute* (***m/mn***) ou en *kilomètres par heure* (***km/h***), etc. Il est donc essentiel de préciser avec soin les unités de longueur et de temps employées lorsqu'on définit la vitesse d'un mobile.

Nous dirons par exemple, la vitesse d'un piéton est de 5 ***km/h***, celle d'une courroie est de 2,50 ***m/s;*** la vitesse de coupe d'un outil de tour est de 20 ***m/mn***.

4. Représentation de la vitesse par un vecteur.

Soit M la position à un instant ***t*** d'un point mobile sur la trajectoire rectiligne $x'x$ (fig. 2). Soit $v = 5$ ***m/s*** sa vitesse.

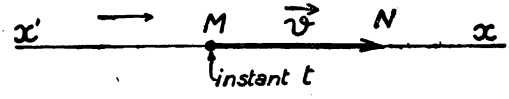


Fig. 2. — A tout instant, la vitesse du mouvement est représentée par un **vecteur** $\vec{v}$.

Convenons de représenter l'unité de vitesse (ici, le *mètre par seconde*) par une longueur de 5 *mm*. La vitesse du mobile est alors figurée par un segment de 25 *mm* dont nous placerons l'origine en M.

Le segment orienté MN, *de même sens que le mouvement*, s'appelle ***vecteur-vitesse*** du mobile au point M de sa trajectoire, ou encore *vecteur vitesse à l'instant* ***t***. On le désigne par le symbole $\vec{v}$ (lisez : *vecteur vitesse v*).

REMARQUE. — Les vecteurs-vitesses en différents points de la trajectoire d'un mouvement rectiligne uniforme, ont tous *même direction, même sens, même grandeur* (fig. 3).

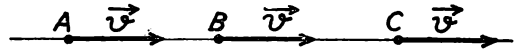


Fig. 3. — En différents points de la trajectoire les vecteurs-vitesses ont même direction, même sens, même grandeur.

5. Formules des espaces du mouvement rectiligne uniforme.

1er Cas : ***A l'instant initial, le point mobile est à l'origine des espaces*** (fig. 4).

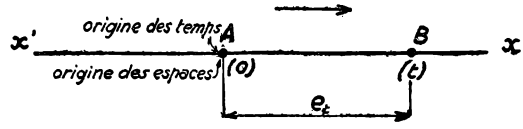


Fig. 4. — Dans ce cas $e_t = vt$.

Soit AB $= e_t$ l'espace parcouru à l'instant t. Par définition, la vitesse $v = \frac{e_t}{t}$ = constante. D'où :

$$e_t = vt \qquad (1)$$

Cette formule exprime que l'espace parcouru est proportionnel au temps employé à le parcourir.

2e Cas : ***A l'instant initial, le point mobile est à une distance e_0 de l'origine des espaces*** (fig. 5).

Soient : O, l'origine des espaces; A, la position du point à l'instant initial. OA $= e_0$.

A l'instant t, le mobile est en B tel que OB $= e_t$. L'espace parcouru

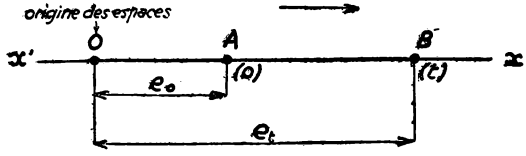


Fig. 5. — Dans ce cas $e_t = e_0 + vt$.

dans l'intervalle de temps $o - t$, est $e_t - e_o$. Le mouvement étant uniforme, la vitesse $v = \frac{e_t - e_0}{t}$, d'où l'on tire :

$$e_t = e_o + vt$$

Cette formule est plus générale que la première.

6. Problèmes d'application.

Problème 1. — *La vitesse d'un point mobile est de 72 km/h. Quel espace mesuré en mètres a-t-il parcouru en 32 secondes?*

Prenons comme unité de temps la *seconde*, et comme unité de longueur le *mètre*.
En une heure ou 3 600 *secondes*, le mobile parcourt 72 *km* ou 72 000 *mètres*.
La vitesse $v = 72\,000 : 3\,600 = 20$ *m/s*.
L'espace parcouru en 32 *secondes*: $e = 20 \times 32 =$ ***640 m***

Problème 2. — *Un piéton a parcouru d'un mouvement rectiligne uniforme* 5,250 *km en* 1 *h* 10 *mn. Quelle est sa vitesse en kilomètres par heure?*

Prenons comme unité de longueur le *kilomètre* et comme unité de temps l'*heure*. L'espace parcouru est de 5,25 *kilomètres;* le temps employé à le parcourir est de

$$70 \text{ minutes, soit } \frac{70}{60} = \frac{7}{6} \text{ heure.}$$

La vitesse est : $v = \frac{e_t}{\frac{7}{6}} = \frac{5{,}25}{\frac{7}{6}} = \frac{5{,}25 \times 6}{7} = \mathbf{4{,}5\ km/h.}$

Problème 3. — *Un piéton part d'une ville A et s'arrête pour se reposer après avoir parcouru* 7 *km. Il marche encore pendant* 50 *minutes et arrive à un village B distant de A de* 11 *km. Quelle a été sa vitesse en m/s, dans la seconde partie du parcours, si l'on suppose son mouvement uniforme?*

Prenons comme unité de longueur le *mètre* et comme unité de temps la *seconde*.

Dans la deuxième partie du voyage, l'espace parcouru est de 11 — 7 = 4 *km* = 4 000 *m*. Le temps employé à le parcourir est 50 *minutes* ou 3 000 *secondes*.

La vitesse est donc : $v = 4\,000 : 3\,000 = \mathbf{1{,}33 m/s.}$

II. — REPRÉSENTATION GRAPHIQUE DES LOIS DU MOUVEMENT UNIFORME

7. Diagramme de la vitesse.

Soit $v = \mathbf{1{,}50\ m/s}$ la vitesse d'un point mobile animé d'un mouvement rectiligne uniforme.

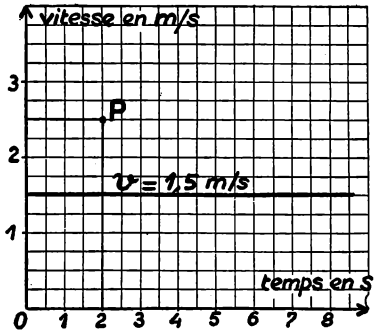


Fig. 6. — **Diagramme de la vitesse** d'un mouvement uniforme. Quelle est sa vitesse? (Chaque carreau du quadrillage a 2,5 *mm* de côté. En abscisses, 5 *mm* représentent 1 *s*; en ordonnées 10 *mm* représentent 1 *m/s*.)

Traçons deux axes rectangulaires sur une feuille de papier millimétré (fig. 6).

a) Sur l'axe des abscisses pris pour *axe des temps*, nous représenterons l'unité de temps : *la seconde*, par un segment de 5 *mm*. *(Echelle des temps :* 5 *mm* pour 1 *s).*

b) Sur l'axe des ordonnées pris pour *axe des vitesses*, l'unité de vitesse: *le mètre par seconde*, sera figurée par un segment de 10 *mm*. *(Échelle des vitesses :* 10 *mm* pour 1 *m/s).*

Chaque point de la figure, tel que P, représente :

1° *par son abscisse* 2, *un instant* bien déterminé : celui qui vient juste 2 secondes après l'instant choisi comme origine des temps;

2° *par son ordonnée* 2,5 *une vitesse* de grandeur bien déterminée : 2,5 *m/s*.

Ce point P exprime ainsi qu'à l'instant considéré 2 *s*, la vitesse est de 2,5 *m/s*.

Dans le cas du *mouvement uniforme*, ***la vitesse v est constante :*** ici 1,5 *m/s*; donc tous les points qui la figurent sont sur une parallèle à l'axe des temps.

Nous obtenons ainsi le *diagramme de la vitesse* du mouvement considéré (fig. 6).

8. Diagramme des espaces du mouvement uniforme.

1er Cas. — ***A l'instant initial, le point mobile est à l'origine des espaces : $e_t = vt$.***

La formule des espaces, où v est un nombre constant, montre que l'espace e_t est une fonction du 1er degré de la variable t [1].

Si l'on porte sur deux axes de coordonnées rectangulaires les temps en abscisses et les espaces parcourus en ordonnées, *les valeurs des espaces en fonction des temps sont représentées par une droite.* Il suffit d'en déterminer deux points pour pouvoir la tracer.

Par exemple, la figure 7 est le diagramme des espaces du mouvement $e_t = 1{,}5\ t$.

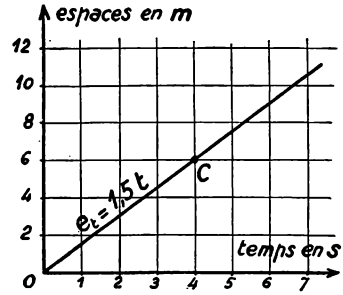


Fig. 7. — **Diagramme des espaces** du mouvement $e_t = 1{,}5\ t$.

Au temps $t = 0\ s$ $\quad e_0 = 0\ m$
Au temps $t = 4\ s$ $\quad e_4 = 6\ m$

Les points figuratifs sont respectivement O et C. Le diagramme des espaces est la droite OC.

2° Cas. — ***A l'instant initial, le point mobile est à une distance e_0 de l'origine des espaces :***

$$e_t = e_0 + vt.$$

Soit $e_t = 4 + 1{,}5\ t$ la loi particulière d'un mouvement uniforme.

Au temps $t = 0\ s$ $\quad e_0 = 4\ m$
Au temps $t = 6\ s$
$e_6 = 4 + 1{,}5 \times 6 = 13\ m$

Le diagramme correspondant est la droite DE de la figure 8. Cette droite se déduit du diagramme de la figure 7 par une translation mesurée par OD.

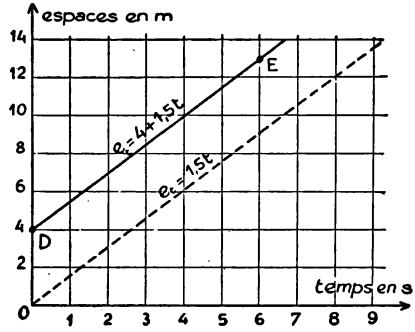


Fig. 8. — *Diagramme des espaces* du mouvement $e_t = 4 + 1{,}5\ t$.

1. Voir cours d'Algèbre (2e Année).

9. La vitesse du mouvement uniforme est proportionnelle à la pente de la droite des espaces.

Soit le diagramme des espaces de la figure 9 où les échelles sont respectivement :

échelle des temps : l mm pour 1 *s;*

échelle des espaces : l' mm pour 1 *m.*

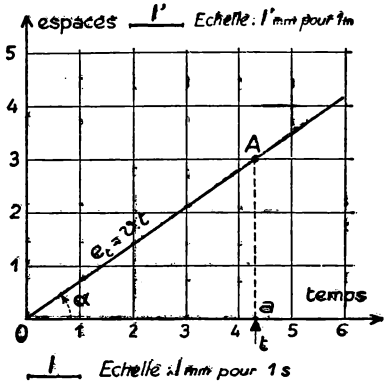


Fig. 9. — *La vitesse* peut se mesurer sur le diagramme des espaces : $v = \frac{l}{l'} tg\,\alpha$

Soit A le point figuratif de l'espace e_t parcouru à l'instant t.

On a : $Oa = l \times t$;

$aA = l' \times e_t$;

d'où : $\frac{e_t}{t} = \frac{l}{l'} \times \frac{aA}{Oa}$.

Mais $\frac{e_t}{t} = v$ et $\frac{aA}{Oa} = tg\alpha$.

Donc, $v = \frac{l}{l'} tg\alpha$.

tg α mesure la *pente* de la droite des espaces sur l'axe des temps.

REMARQUE 1. — Si $l = l'$, $v = tg\,\alpha$. C'est le cas de la figure 9 où $l = l'$

$aA = 21\ mm$; $Oa = 30\ mm$; $tg\alpha = \frac{21}{30} = 0{,}7$; $v = 0{,}7\ m/s$.

REMARQUE 2. — Plus grande est la pente de la droite des espaces, plus grande est la vitesse du mouvement uniforme. Une droite des espaces qui fait un angle voisin de 90° avec l'axe des temps caractérise donc un mouvement très rapide.

10. L'espace parcouru est proportionnel à une aire mesurée sur le diagramme des vitesses.

Considérons le diagramme des vitesses de la figure 10 dont les échelles sont :

échelle des temps : l mm pour 1 *seconde.*
échelle des vitesses : l' mm pour 1 *mètre par seconde.*

L'espace parcouru à l'instant t est proportionnel à l'aire S du rectangle OnNn'. En effet :

$On = l \times t$; $nN = l' \times v$; d'où $On \times nN = ll' \times vt = S$.

De cette dernière égalité, nous tirons : $vt = e_t = \frac{S}{ll'}$

EXEMPLE. — *Sur la figure* 10 *on mesure : On* = 25 *mm ; On'* = 20 *mm. La figure a été construite en prenant pour échelles :*

$l = 0{,}1$ *mm pour* 1 *s*

$l' = 2$ *mm pour* 1 *m/s.*

Quel est l'espace représenté par l'aire S du rectangle OnNn' ?

1re *Solution.* — Le segment *On* représente *un temps* égal à :

$On : l = 25 : 0{,}1 = 250$ *secondes.*

Le segment *On'* représente *une vitesse* égale à :

$On' : l' = 20 : 2 = 10$ *mètres par seconde.*

Le rectangle *OnNn'* représente donc l'espace parcouru pendant 250 *secondes* par un mobile dont la vitesse constante est égale à 10 *mètres par seconde,* soit :

$10 \times 250 =$ ***2 500 mètres.***

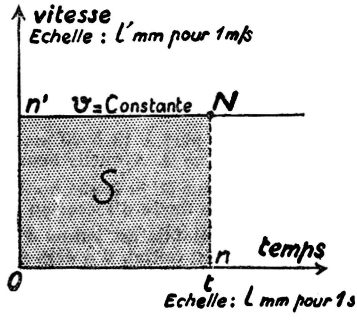


Fig. 10. — L'*espace parcouru* à l'instant *t* est *proportionnel* à l'aire *S* du rectangle *NnOn'*.

2e *Solution.* — Le raisonnement ci-dessus est évité en appliquant la formule

$$e_t = \frac{S}{ll'}.$$

Ici :

$$S = On \times On' = 25 \times 20 = 500 \text{ mm}^2 ;$$
$$ll' = 0{,}1 \times 2 = 0{,}2 \text{ mm}^2 ;$$
$$e_t = 500 : 0{,}2 = 2\,500 \text{ mètres.}$$

REMARQUE. — Nous aurons besoin, plus tard, d'utiliser des aires représentant des espaces afin de démontrer des formules importantes.

Résumé.

1. Un point est animé d'un mouvement rectiligne uniforme s'il parcourt sur une droite et toujours dans le même sens des espaces égaux en des temps égaux, quels que soient ces temps.

2. L'espace parcouru est proportionnel au temps employé à le parcourir.

3. La vitesse est le quotient de l'espace parcouru par le temps mis à le parcourir ; elle est constante.

On représente la vitesse par un *vecteur* orienté dans le sens du mouvement et de longueur proportionnelle à sa valeur numérique.

4. Selon que le point où se trouve le mobile à l'origine des temps coïncide ou non avec le point choisi comme origine des espaces, la formule des espaces s'écrit :

$$\boxed{e_t = vt} \quad \text{ou} \quad \boxed{e_t = e_0 + vt}$$

5. Le diagramme de la vitesse est une droite parallèle à l'axe des temps. Celui des espaces une droite inclinée sur cet axe.

Exercices.

1. Nature du mouvement et distance parcourue en 2 *mn* 3 *s* par une automobile dont l'indicateur de vitesse marque constamment 84 *km/h* pendant cet intervalle de temps?

2. Un piéton part à 13 *h* 30 *mn* et parcourt une distance de 5,600 *km* à la vitesse constante de 4 *km/h*. A quelle heure aura-t-il terminé son parcours?

3. Un ascenseur élève à une hauteur de 10 *mètres* une lourde charge. Le mouvement est uniforme. La durée d'ascension est de 7 *secondes*. Quelle est sa vitesse en *m/s?*

4. Un point mobile est animé d'un mouvement rectiligne uniforme de vitesse $v = 3$ *m/s*. A l'instant initial, il a déjà parcouru 21 *mètres*.

1° Quel espace total a-t-il parcouru au bout de 10 *secondes?*

2° Au bout de combien de temps a-t-il parcouru 81 *mètres?*

3° Dresser le diagramme des vitesses et des espaces en adoptant les échelles suivantes:

Échelle des temps : 10 *mm* pour 1 *s*	Echelle des temps : 10 *mm* pour 1 *s*
Échelle des vitesses : 10 *mm* pour 1 *m/s*	Echelle des espaces : 2 *mm* pour 1 *m*

Application des diagrammes du mouvement uniforme.

1. Problèmes que permet de résoudre graphiquement le diagramme des espaces.

1° *Déterminer à l'aide du diagramme de la figure* 1 *le temps* t *mis par le mobile pour parcourir* 5 *mètres.*

Les flèches (5 - B - 3,3) donnent la solution :

t = 3,3 secondes.

(On ne peut préciser le chiffre des centièmes de seconde).

2° *Trouver sur le même diagramme l'espace parcouru à l'instant* 1,75 *s.*

Les flèches (1,75 - A - 2,6) donnent le résultat :

e = 2,6 mètres.

(On ne peut préciser le chiffre des centimètres.)

Dans les deux cas, l'erreur commise est d'autant plus faible que les échelles adoptées sont plus grandes.

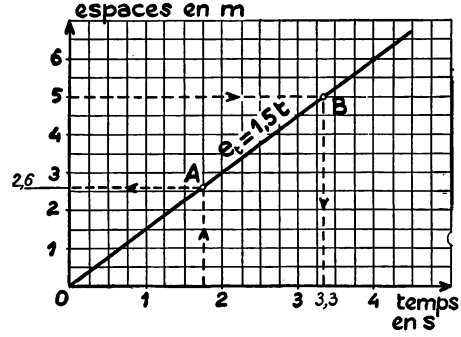


Fig. 1. — Diagramme des espaces d'un mouvement uniforme.

2. Lecture d'un diagramme des espaces.

Considérons la figure 2.

1° Le point A montre qu'à l'instant initial le mobile est à 3 *kilomètres* du point choisi comme origine des espaces.

2° Le segment AB indique que ce mobile a d'abord parcouru, d'un mouvement uniforme, 3 kilomètres en 15 *minutes* (soit à une vitesse de 12 *km/h*).

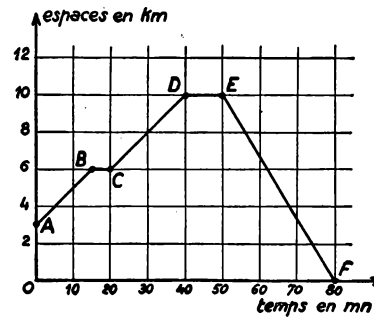


Fig. 2. — Diagramme des espaces d'un mouvement présentant des intervalles de repos.

3° Le segment BC parallèle à l'axe des temps correspond à un arrêt de 5 *minutes*.

4° Le mobile est ensuite reparti et a parcouru 4 *kilomètres* en 20 *minutes* (segment CD), soit à une vitesse de 12 *km/h*.

5° Après un arrêt de 10 *minutes* (segment DE), il a parcouru en sens

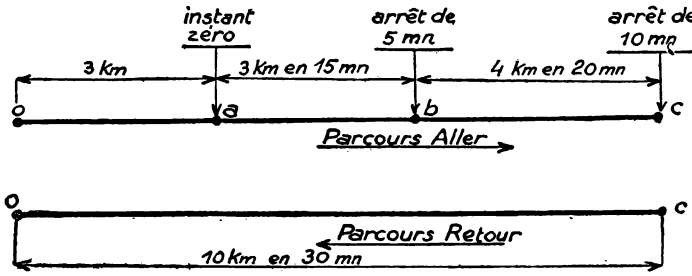


Fig. 3. — Cette figure traduit sous une autre forme le mouvement représenté par le diagramme de la figure 2.

inverse 10 *kilomètres* en 30 *minutes*, soit à la vitesse de 20 *km/h* (segment EF).

Les résultats ci-dessus peuvent être résumés par la figure 3. Il suffit de la comparer au diagramme pour constater la supériorité de celui-ci.

3. Solution graphique des problèmes de courriers.

Deux villes M et N sont distantes de 16 *kilomètres. Un piéton part de M à* 14 *heures et marche à la vitesse constante de* 6 *km/h. Tous les* 2 *kilomètres, il se repose pendant* 5 *minutes.*

Deux cyclistes partent ensemble de N à 14 *h* 20 *mn. Le premier accomplit le parcours NM sans arrêt à la vitesse de* 24 *km/h. Le second roule d'abord à la vitesse de* 12 *km/h, puis, victime d'une crevaison à* 14 *h* 30 *mn, s'arrête* 10 *minutes pour réparer. Il termine ensuite le parcours à la vitesse de* 21 *km/h.*

1° *Etablir le diagramme des espaces du piéton et de chacun des cyclistes.*

2° *Déterminer graphiquement l'heure de chacune des rencontres du piéton avec les cyclistes, ainsi que les distances des points de rencontre à la ville M. (Echelle des temps:* 1 *cm pour* 10 *mn; échelle des espaces :* 1 *cm pour* 2 *km).*

1° Prenons comme *origine des temps* 14 heures (instant 0) et comme *origine des espaces* la ville M d'où part le piéton.

a) *Diagramme des espaces parcourus par le piéton.*

Le piéton fait 6 *kilomètres* en 1 *heure* ou 60 *minutes*. En 20 *minutes*, il fait donc 2 *kilomètres*. Les périodes de marche sont traduites sur le diagramme de la figure 4 par des segments obliques également incli-

nés sur l'axe des temps (v = constante), et les périodes d'arrêt par des segments parallèles à cet axe ($v = 0$).

b) *Diagramme des espaces parcourus par le premier cycliste.*

Son mouvement est *uniforme* et *sans arrêt;* donc le diagramme des espaces est une droite. Il suffit d'en déterminer deux points.

Au départ, l'instant est 20 *minutes* et la distance à l'origine des espaces 16 *kilomètres*, ce qui donne le point C.

La vitesse est de 24 *km/h*. Donc, après avoir roulé 20 *minutes*, c'est-à-dire à l'instant 20 + 20 = 40 *minutes*, le cycliste a parcouru

$$24 \times \frac{20}{60} = 8 \text{ kilomètres}$$

de la ville N vers la ville M; de sorte qu'il se trouve à une distance égale à 16 — 8 = 8 *kilomètres* de la ville M, origine des espaces. D'où le point J (40 *mn*, 8 *km*).

La droite CJ est le diagramme des espaces du premier cycliste.

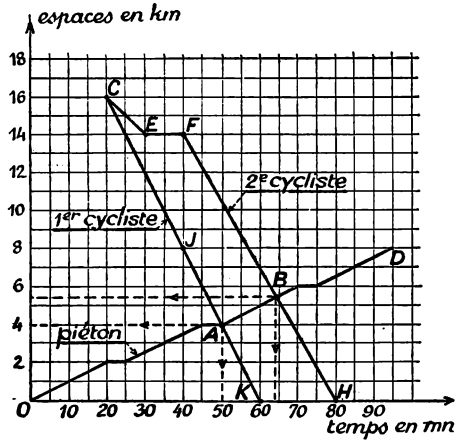


Fig. 4. — Résolution graphique d'un *problème de courriers.*

c) *Diagramme des espaces parcourus par le deuxième cycliste.*

Même raisonnement; mais cette fois le mouvement n'est pas uniforme dans son ensemble. Il est seulement uniforme pendant certains intervalles de temps, d'où la ligne brisée CEFH du diagramme de la figure 4.

2° Les points d'insersection A et B permettent de lire :

1re *rencontre* (point A) : instant 50 *minutes* (soit 14 *h* 50 *mn*); à 4 *kilomètres* de M.

2e *rencontre* (point B) ; instant 64 *mn* 30 *s* (soit 15 *h* 4 *mn* 30 *s*); à 5,55 *km* de M.

4. Graphique des trains.

Pratiquement, il est difficile de réaliser un mouvement qui soit rigoureusement uniforme.

Nous avons tous observé le déplacement d'une automobile. Elle démarre progressivement, ralentit aux montées, accélère dans les descentes et ne s'arrête pas instantanément lorsqu'on fait agir les freins. Il en est de même pour un cycliste, un train. Ces mobiles n'ont pas un mouvement uniforme; mais, *pour simplifier les calculs*, on suppose souvent qu'il en est ainsi.

En particulier, dans l'exploitation des Chemins de fer, on établit des graphiques sur lesquels on trace la courbe des espaces de chacun des convois qui empruntent une ligne déterminée. Ce tracé repose sur les conventions suivantes :

1° *entre deux gares consécutives le mouvement d'un train est uniforme ;*

2° *l'origine des temps est* 0 *heure ;* — les heures sont numérotées de 0 à 24;

3° *l'origine des espaces est une gare du réseau, généralement une gare importante.*

La figure 5 donne un fragment d'un de ces diagrammes. La partie correspondant

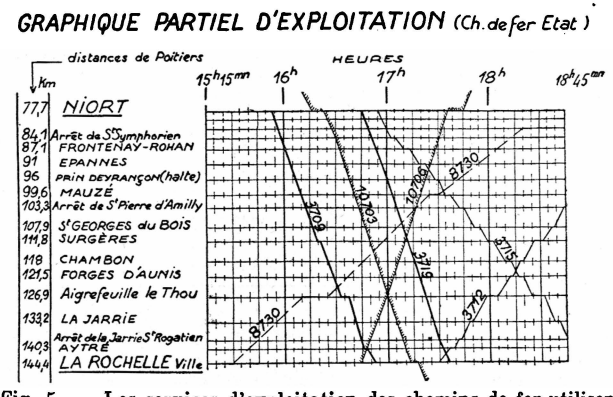


Fig. 5. — Les services d'exploitation des chemins de fer utilisent des diagrammes de ce genre.

aux trains qui circulent entre 0 et 15 *h* 15 *mn* a été supprimée; de même que celle des trains qui circulent entre 18 *h* 45 *mn* et 24 *heures.*

On voit également que l'*origine des espaces* est Poitiers, mais qu'on a supprimé toute la partie du diagramme comprise entre Poitiers et Niort.

Résumons quelques observations :

1° Tous les trains allant de Niort vers La Rochelle sont caractérisés par des droites allant de la gauche vers la droite en descendant; tous ceux allant de La Rochelle vers Niort le sont par des droites allant de la gauche vers la droite en montant.

2° On reconnaît un rapide ou un express à l'absence ou au petit nombre d'arrêts. (Exemples : les trains 3 709 et 3 719 de Niort vers La Rochelle.)

3° De deux trains marchant dans le même sens, le plus rapide est celui dont la ligne des espaces se rapproche le plus de la verticale (qui a la plus grande pente) (Exemples : les trains 8 730 et 10 706 de La Rochelle vers Niort).

Il est facile de répondre aux questions suivantes :

1° *Quelles sont, entre* 15 *h* 15 *mn et* 18 *heures, les heures de départ des trains allant vers Niort aux gares de La Rochelle, Aigrefeuille-le-Thou, Saint-Georges-du-Bois?*

Mêmes questions pour les heures de départ, des mêmes gares, des trains allant vers La Rochelle.

2° *Quelles sont les heures d'arrivée à la gare de Mauzé des trains qui s'arrêtent à cette gare et qui viennent de La Rochelle? de Niort?*

3° *Que nous apprennent les graphiques du train* 10 703? *du train* 10 706? *du train* 3 709? *du train* 3 715?

REMARQUE. — Le graphique des trains permet de résoudre les nombreux problèmes que pose l'exploitation. Il renseigne également sur le profil de la ligne, sur l'emplacement des postes d'eau, des bifurcations, des voies de garage. Ces indications ne figurent pas sur la partie du diagramme que nous venons d'étudier.

5. Étude du mouvement d'un étau-limeur.

Chaque machine-outil de l'atelier d'ajustage porte un ***abaque*** permettant de régler sa vitesse pour que l'outil travaille dans les conditions économiques les plus favorables.

L'utilisation intelligente de ces abaques exige que l'on sache résoudre les problèmes suivants.

Problème 1. — *Un étau-limeur à retour rapide est ainsi réglé :*

Longueur de la course totale de l'outil..... 450 *mm.*

Nombre de courses aller et retour par minute..... 16.

La durée de la course aller (course de travail) est les 2/3 *de la durée totale d'une course aller et retour.*

Quelle est la vitesse moyenne de l'outil par rapport à la surface travaillée (ou ***vitesse de coupe****)? On l'exprimera en mètres par minute et on supposera que, pendant la course de travail, le mouvement est uniforme.*

Réponse : $v = 10{,}8$ ***mètres par minute***[1].

Problème 2. — *Même problème mais en supposant que les longueurs de courses soient :* 50 *mm,* 100 *mm,* 150 *mm,* 200 *mm.*

*Montrer que la vitesse de coupe est proportionnelle à la longueur de la course si le nombre d'aller et retour ne change pas (*16 *par minute).*

Tracer le diagramme des vitesses de coupe (pour 16 *courses par minute), en portant :*

1° en abscisses : *les longueurs de course exprimées en millimètres ;*

2° en ordonnées : *les vitesses de coupe exprimées en mètres par minute.*

Problème 3. — 1° *Montrer que si un étau-limeur est ainsi réglé :*

longueur totale de la course en millimètres : l

nombre de courses aller et retour par minute : n

durée de la course aller : 2/3 *de la durée de la course aller et retour, la vitesse de coupe de l'outil en* mètres par minute *est :*

$$v = \frac{3}{2\,000}\, nl.$$

2° *Tracer les diagrammes des vitesses de coupe pour les valeurs de* l *comprises entre* 50 *et* 450 *mm et les valeurs suivantes de* n :

$n = 16$ $n = 23$ $n = 32$ $n = 44$
$n = 48$ $n = 69$ $n = 96$ $n = 132$.

On obtient le diagramme de la figure 6.

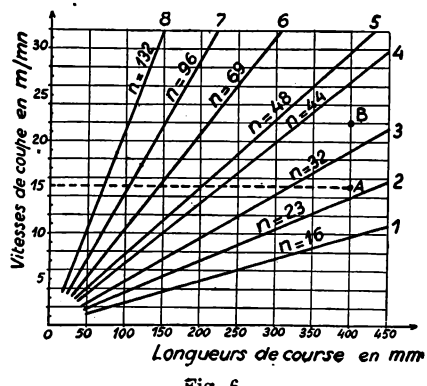


Fig. 6.

1. Nous laissons au lecteur le soin de faire le calcul.

Problème 4. — *Un élève doit travailler une pièce qui nécessite une course de 400 mm. Ayant billé cette pièce il a trouvé que la résistance du métal à la traction est* $R = 60\ kg/mm^2$*; il sait que l'outil est en acier rapide, et il a à sa disposition le tableau suivant :*

OUTIL EN ACIER RAPIDE	
R en kg/mm^2 du métal à travailler	Vitesse de coupe
48 à 42	25 à 30 *m/mn*
48 à 55	19 à 26 —
55 à 65	15 à 22 —
65 à 75	12 à 18 —
65 à 95	3 à 5 —

A quel nombre n de courses par minute doit-il faire marcher son étau-limeur ?

SOLUTION. — 1° Le tableau ci-dessus indique que la vitesse de coupe correspondant à un acier de résistance $R = 60\ kg/mm^2$ doit être comprise entre 15 et 22 *m/mn*.

En se reportant à l'abaque de la figure 6 nous lisons :

Course 400 *mm* { vitesse 15 *m/mn* : point A ; vitesse 22 *m/mn* : point B

L'élève doit donc régler l'étau-limeur pour ***n = 32 courses aller et retour par minute*** et d'après la figure 6 la vitesse de coupe sera de 19 *m/mn*.

Exercices.

1. Lire le diagramme des espaces de la figure 7. Évaluer pour chaque phase du mouvement la vitesse du mobile. Tracer ensuite le diagramme des vitesses.

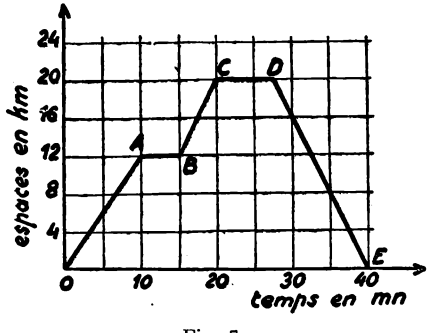


Fig. 7.

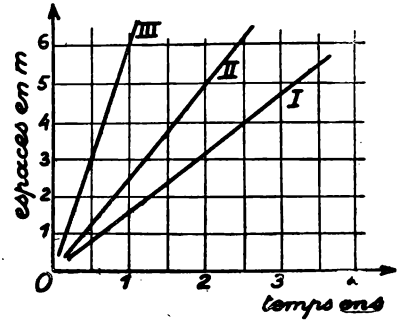


Fig. 8.

2. La figure 8 représente les diagrammes des espaces de 3 mobiles différents. Lequel de ces mobiles est le plus rapide? Déterminer la vitesse de chacun d'eux en *m/s*, puis en *km/h*.

3. Un voyageur part en auto de la ville A à 14 *heures* dans la direction de la ville B. Il s'arrête 1 *heure* de 16 à 17 *heures*.

Un cycliste part à la même heure de B en direction de A, et s'arrête 10 *minutes* après chaque heure de marche.

La vitesse de la voiture est de 50 *km/h*, celle du cycliste 20 *km/h*. La distance AB est de 154 *kilomètres*.

Déterminer graphiquement sur du papier millimétré l'heure et le lieu de la rencontre.

Échelle des temps: 30 *millimètres* pour 1 *heure*.
Échelle des espaces: 1 *millimètre* pour 1 *kilomètre*.

4. Étudier un abaque d'étau-limeur relevé à l'atelier.

5. Traiter le problème des courriers (§ 3 de la leçon) par l'algèbre.

6. Traiter par l'algèbre l'exercice 3.

Mouvement rectiligne uniformément accéléré.

Chacun de nous a vu une balle rouler dans une rue en pente : elle descend de plus en plus vite. Nous nous proposons d'étudier un mouvement analogue : celui d'une bille roulant sur un plan incliné [1].

I. — DÉFINITION PRÉLIMINAIRE DE LA VITESSE MOYENNE D'UN MOBILE

Un cycliste roule sans arrêt, de A vers D, sur une route de profil ABCD tel que AB = BC = CD = 800 *mètres* (fig. 1).

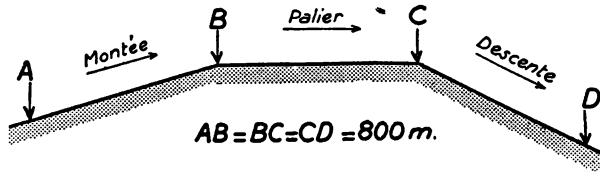


Fig. 1. — La *vitesse moyenne* pendant le voyage de A en D est le quotient de l'espace total parcouru par le temps mis à le parcourir.

Il monte avec peine la côte AB, roule avec plus de facilité sur le palier BC, et descend la côte CD à vive allure. Supposons qu'il ait mis :

4 *minutes* pour aller de A en B,
2 *minutes* — de B en C,
1 *mn* 30 *s* — de C en D.

1° Les *distances égales* AB, BC, CD, sont parcourues en des *temps inégaux :* le mouvement n'est donc pas uniforme; il est dit *varié.*

2° La distance totale AD = 2 400 *mètres* a été parcourue en 7 *mn* 30 *s* ou 450 *secondes.*

Ce cycliste aurait parcouru le même espace s'il avait conservé, pendant ces 450 *secondes,* un *mouvement uniforme* de vitesse :

$$v = \frac{2\,400}{450} = 5{,}33 \ m/s$$

1. Le plan incliné fut utilisé par le savant italien Galilée (1564-1642) pour établir les lois du mouvement des corps soumis à l'action de la pesanteur.

Ce nombre mesure la ***vitesse moyenne*** du cycliste, pendant les 7 *mn* 30 *s* considérées.

GÉNÉRALISONS. — *La vitesse moyenne d'un mobile dans un intervalle de temps déterminé est la vitesse d'un mobile fictif qui, d'un mouvement uniforme, parcourrait le même espace dans le même temps.*

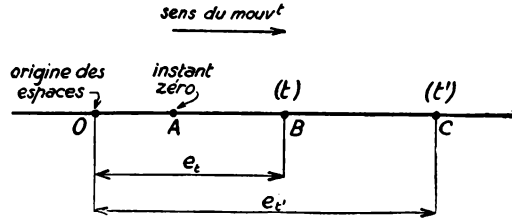


Fig. 2 — La vitesse moyenne du point mobile, dans l'intervalle de temps $(t' - t)$ est : $\frac{e_{t'} - e_t}{t' - t}$.

Soient : e_t l'espace parcouru à l'instant t
$e_{t'}$ — — t'
par un point mobile (fig. 2).

Sa vitesse moyenne entre les instants t et t' est donc, par définition :

$$v_{moy} = \frac{e_{t'} - e_t}{t' - t}.$$

II. — ÉTUDE EXPÉRIMENTALE DU MOUVEMENT D'UNE BILLE SUR UN PLAN INCLINÉ

Laissons rouler une bille d'acier sur un plan incliné [1]. Son centre se meut parallèlement au plan. Etudions le mouvement de ce point à l'aide du dispositif de la figure 3 : un mètre nous servira à mesurer les *espaces* et un métronome battant la seconde mesurera les *temps*.

1. Expériences.

1° La bille, d'abord retenue par un électro-aimant, est abandonnée à l'instant où l'on perçoit un battement du métronome.

Par tâtonnements, réglons le butoir de telle sorte que la bille vienne le frapper 1 *seconde* après son départ. Mesurons l'espace parcouru : soit $e_1 = 0{,}10$ *m*.

1. On peut démontrer qu'elle suit une *ligne de plus grande pente du plan* ; nous nous contenterons ici de le constater.

2° Recommençons l'expérience en plaçant le butoir à des distances telles que la bille l'atteigne 2, 3, 4... secondes après le départ.

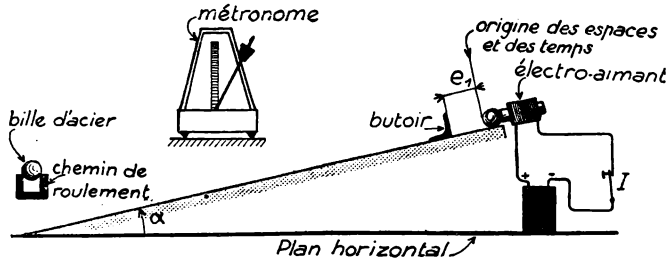


Fig. 3. — Pour faire les mesures, on abandonne la bille (*ouvrir l'interrupteur I*) à l'instant d'un battement du métronome.

Soient e_2, e_3, e_4... les espaces parcourus correspondants. Dressons le tableau des résultats obtenus :

DURÉE DU MOUVEMENT	ESPACES PARCOURUS
$t_1 = 1$ *seconde*	$e_1 = 0{,}10$ *mètre*
$t_2 = 2$ —	$e_2 = 0{,}40$ —
$t_3 = 3$ —	$e_3 = 0{,}90$ —
$t_4 = 4$ —	$e_4 = 1{,}60$ —
$t_5 = 5$ —	$e_5 = 2{,}50$ —
.....	.....

2. Interprétation des mesures.

1° Le *mouvement n'est pas uniforme*, car l'espace parcouru n'est pas proportionnel au temps.

2° Divisons chaque espace par le *carré du temps* mis à le parcourir :

$$\frac{e_1}{t_1^2} = \frac{0{,}10}{1^2} = 0{,}10 \qquad \frac{e_3}{t_3^2} = \frac{0{,}90}{3^2} = 0{,}10$$

$$\frac{e_2}{t_2^2} = \frac{0{,}40}{2^2} = 0{,}10 \qquad \frac{e_4}{t_4^2} = \frac{1{,}60}{4^2} = 0{,}10$$

Tous les quotients obtenus sont égaux à 0,10. Nous ***généralisons*** cette conclusion : si la bille parcourt un espace e_t en un temps t, nous avons toujours :

$$\frac{e_t}{t^2} = 0{,}10$$

ce que nous écrivons encore : $e_t = 0{,}10\ t^2$.

Cette formule exprime que : ***l'espace parcouru par la bille est proportionnel au carré du temps mis à le parcourir.***

Le nombre 0,10 est le coefficient de proportionnalité. Remarquons qu'il est égal à l'espace parcouru pendant la première seconde du mouvement.

3. Influence de l'inclinaison du plan.

Si l'*on incline davantage le plan*, on reconnaît que la bille obéit à une loi analogue, mais *le coefficient de proportionnalité augmente.*

D'une manière générale, si a est le coefficient de proportionnalité établi par l'expérience, la loi du mouvement s'écrit :

$$e_t = a\,t^2 \qquad (1)$$

4. Vitesse moyenne de la bille dans un intervalle de temps déterminé.

Considérons un intervalle de temps de 2 *secondes* compris, par exemple, entre la 2e et la 4e secondes (fig. 4). D'après la définition de la vitesse moyenne on a :

$$v_{moy} = \frac{e_4 - e_2}{t_4 - t_2} = \frac{1{,}60 - 0{,}40}{4 - 2} = 0{,}60\ m/s.$$

D'une manière générale, si e_t est l'espace parcouru par la bille au

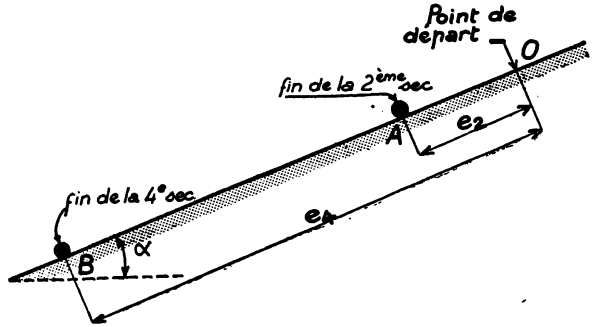


Fig. 4. — Quelle est l'expression de la vitesse moyenne entre l'instant 2 et l'instant 4?

temps t; $e_{t'}$ l'espace parcouru au temps t', la ***vitesse moyenne*** dans l'intervalle $(t' - t)$ a pour valeur :

$$v_{moy} = \frac{e_{t'} - e_t}{t' - t} = \frac{at'^2 - at^2}{t' - t} = a\,\frac{t'^2 - t^2}{t' - t} = a\,(t' + t)$$

$$v_{moy} = a\,(t + t') \qquad (2)$$

5. Vitesse de la bille à un instant t, ou vitesse instantanée.

Dans l'expérience précédente, nous avons trouvé :

$$a = 0{,}10.$$

La vitesse moyenne entre deux instants t et t' est donc :

$$v_{moy} = 0{,}10\ (t + t').$$

Calculons sa valeur numérique dans un intervalle de temps compris entre la 2e seconde ($t = 2$ s) et un instant t' de plus en plus voisin. Le tableau ci-dessous résume les opérations successives.

Intervalle : 1 s	$(t = 2, t' = 3)$	$v_{moy} = 0{,}10\ (2 + 3\ ) = 0{,}50$ m/s
— 0,1 s	$(t = 2, t' = 2{,}1\ )$	$v_{moy} = 0{,}10\ (2 + 2{,}1\ ) = 0{,}41$ m/s
— 0,01 s	$(t = 2, t' = 2{,}01\ )$	$v_{moy} = 0{,}10\ (2 + 2{,}01\ ) = 0{,}401$ m/s
— 0,001 s	$(t = 2, t' = 2{,}001)$	$v_{moy} = 0{,}10\ (2 + 2{,}001) = 0{,}4001$ m/s

Nous remarquons qu'à mesure que l'intervalle de temps $(t' - t)$ diminue, la vitesse moyenne, pendant cet intervalle, se rapproche de la valeur 0,40 m/s. C'est pourquoi nous dirons que *la vitesse à l'instant* 2, soit v_2, est 0,40 m/s.

GÉNÉRALISONS. — 1° On trouve *la vitesse d'un mobile à un instant donné* t en calculant *sa vitesse moyenne entre cet instant* t *et un instant infiniment voisin* t'.

v_t = limite de v_{moy} entre t et t' quand t' tend vers t.

2° Dans le *cas particulier* où la vitesse moyenne entre deux instants t et t' est donnée par la formule :

$$v_{moy} = a\ (t + t')$$

la *vitesse à l'instant* t est :

$$v_t = a\ (t + t) = 2\ a\ t \qquad (3)$$

CONCLUSION : ***La vitesse de la bille croît proportionnellement au temps.*** C'est la loi des vitesses.

6. Signification physique de la vitesse à un instant t.

Imaginons qu'à partir d'un instant t, la vitesse v ne change plus. Le mouvement de la bille deviendrait alors uniforme et sa vitesse serait celle qu'elle avait à l'instant considéré t.

La vitesse à un instant t *d'un point mobile est donc la vitesse qu'aurait ce point si, à partir de cet instant, son mouvement devenait uniforme.*

7. Accélération du mouvement.

Utilisons la formule (2) pour calculer la vitesse instantanée de la bille aux instants 1s, 2s, 3s..., etc. Nous obtenons :

$v_1 = 2 \times 0{,}10 \times 1 = 0{,}20\ m/s$ || $v_3 = 2 \times 0{,}10 \times 3 = 0{,}60\ m/s$
$v_2 = 2 \times 0{,}10 \times 2 = 0{,}40\ m/s$ || $v_4 = 2 \times 0{,}10 \times 4 = 0{,}80\ m/s$

La vitesse augmente, pendant chaque seconde, de 0,20 *m/s.*

On appelle accélération l'augmentation de la vitesse par unité de temps.

Dans le cas étudié, elle est ***constante, uniforme,*** et c'est pourquoi le mouvement de la bille est dit *uniformément accéléré.*

Nous désignerons habituellement l'accélération par la lettre grecque γ. Dans l'exemple ci-dessus, $\gamma = 0{,}20$ *m/s par seconde,* ce qu'on écrit en abrégé : $\gamma = 0{,}20$ *m/s/s.*

REMARQUE. — Dans le cas général d'un mouvement uniformément accéléré dont la loi des espaces est $e_t = at^2$ et par suite la loi des vitesses $v_t = 2\,at$, la valeur de l'accélération est :

$$\gamma = 2a \qquad (4)$$

Remarquons que l'espace parcouru pendant la 1re seconde :

$$e_1 = a \times 1^2 = a; \quad \text{donc} \quad \gamma = 2\,e_1.$$

Le nombre qui mesure l'accélération est égal au double du nombre qui mesure l'espace parcouru pendant la 1re *seconde du mouvement (le mobile partant du repos).*

Résumé.

1. **Lorsqu'une bille roule le long d'un plan incliné, son centre est animé d'un *mouvement rectiligne uniformément accéléré.***

2. **Si la bille part du repos sans être lancée, et si l'on compte : les espaces parcourus à partir du point de départ, les temps à partir de l'instant de départ :**

1° ***l'espace parcouru e_t est proportionnel au carré du temps t employé à le parcourir.*** **C'est là la *loi des espaces,* traduite par la formule :**

$$\boxed{e_t = at^2} \qquad (a = \text{constante}).$$

2° ***la vitesse instantanée v_t est proportionnelle au temps t.*** **C'est la *loi des vitesses,* représentée par la formule :**

$$\boxed{v_t = 2at}$$

3° ***l'accélération γ est l'augmentation de la vitesse pendant chaque unité de temps.*** **Elle est constante :**

$$\boxed{\gamma = 2a}$$

Exercices.

1. La loi des espaces d'un certain mouvement uniformément accéléré est $e_t = 2{,}5\ t^2$ l'unité de longueur étant le *mètre* et l'unité de temps la *seconde.*

1° Quel est l'espace parcouru par le mobile à la fin de la 4e seconde?

2° Quelle est la *vitesse moyenne* pendant les 4 premières secondes ?
Quelle est la vitesse moyenne entre la fin de la 1re seconde ($t = 1$) et la fin de la 4e seconde ($t = 4$).
3° Quelle est la valeur de la vitesse instantanée à la fin de la 4e seconde ($t = 4$) à la fin de la 10e seconde ($t = 10$).

2. Démontrer que la vitesse moyenne entre les instants t et t' est la moyenne des vitesses instantanées à chacun de ces instants :

$$v_{moy} = \frac{v_t + v_{t'}}{2}$$

3. Une bille roulant sur un plan incliné a parcouru depuis son départ un espace de 2,40 *m* en 4 *secondes*. Calculer :
1° son accélération;
2° sa vitesse au bout de la 4e *seconde*;
3° l'espace parcouru au bout de 5,5 *secondes*;
4° sa vitesse à ce dernier instant.

4. Un plan incliné de longueur 0,80 *m* est prolongé à sa partie inférieure par un plan horizontal bien poli. Une bille abandonnée à elle-même, en haut du plan incliné, descend celui-ci avec une accélération de 0,40 *m/s/s;* arrivée en bas son mouvement devient uniforme. Calculer :
1° le temps mis pour atteindre le plan horizontal;
2° la vitesse du mouvement uniforme;
3° l'espace parcouru lorsqu'il s'est écoulé 3 *secondes* depuis l'instant du départ.

Mouvement rectiligne uniformément accéléré
(SANS VITESSE INITIALE)

I. — LOIS DU MOUVEMENT

1. Formules du mouvement uniformément accéléré sans vitesse initiale.

Dans la leçon précédente, nous avons établi les lois du mouvement du centre d'une bille qui roule sur un plan incliné. Lorsque cette bille est abandonnée *sans être lancée (sans vitesse initiale)*, et lorsque les espaces sont comptés à partir du point de départ, les temps à partir de l'instant de départ, nous avons montré que le mouvement obéit aux lois suivantes :

1° *loi des espaces :* $e_t = at^2$
2° *loi des vitesses :* $v_t = 2\,at$ (a = constante)
3° *loi de l'accélération :* $\gamma = 2\,a$ = constante.

Remplaçons a par $\frac{\gamma}{2}$. Les formules précédentes deviennent :

$$e_t = \frac{1}{2}\,\gamma\,t^2 \qquad (1) \qquad\qquad v_t = \gamma\,t \qquad (2)$$

La formule (1) convient au cas où le point mobile est à l'origine des espaces à l'instant initial. Si à cet instant il a déjà parcouru un espace e_0, il est évident que l'espace parcouru à l'instant t est :

$$e_t = e_0 + \frac{1}{2}\,\gamma\,t^2 \qquad (3)$$

2. La vitesse à un instant quelconque peut s'exprimer en fonction de l'accélération et de l'espace parcouru à cet instant.

Soit $e_t = \frac{1}{2}\,\gamma t^2$ l'espace parcouru à un instant t. La vitesse à cet instant est $v_t = \gamma t$. De cette égalité nous tirons : $t = \frac{v_t}{\gamma}$. Portons cette valeur de t dans la première égalité :

$$e_t = \frac{1}{2}\,\gamma \times \left(\frac{v_t}{\gamma}\right)^2 = \frac{1}{2}\,\frac{v_t^2}{\gamma}. \qquad \text{D'où} \qquad v_t^2 = 2\,\gamma e_t.$$

Nous voyons que lorsque le mobile a parcouru un espace e, la vitesse v correspondante est :

$$v = \sqrt{2\gamma e}.^{1} \qquad (4)$$

EXEMPLE NUMÉRIQUE. — *Un mobile part sans vitesse initiale, avec une accélération de 5 m/s/s. Quelle est sa vitesse quand il a parcouru 90 mètres ?*

Ici on a : $\gamma = 5 \quad ; \quad e = 90$

$$v = \sqrt{2\gamma e} = \sqrt{2 \times 5 \times 90} = \sqrt{900} = \mathbf{30\ m/s}$$

3. Vecteur accélération.

Considérons un point mobile qui *part du repos* (vitesse initiale nulle) et qui se meut d'un mouvement *rectiligne d'accélération* $\gamma = \mathbf{0{,}20\ m/s/s}$. Les *vitesses* aux instants 1 *s*, 2 *s*, 3 *s*, sont respectivement :

$$v_1 = 0{,}20 \times 1 = 0{,}20\ m/s; \qquad v_2 = 0{,}20 \times 2 = 0{,}40\ m/s;$$
$$v_3 = 0{,}20 \times 3 = 0{,}60\ m/s$$

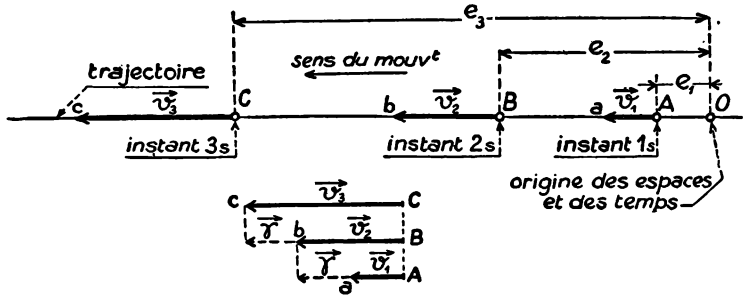


Fig. 1. — On passe d'un vecteur vitesse au suivant en lui ajoutant un *vecteur-accélération* $\vec{\gamma}$.

Soient A, B, C les positions du point aux mêmes instants (fig. 1). En chacune d'elles, traçons les vecteurs-vitesses correspondants. Ils ont même direction et même sens, mais chacun d'eux diffère de celui qui le suit d'une longueur constante qui représente l'accélération du mouvement, soit 0,20 *m/s/s*. On passe d'un vecteur-vitesse donné au suivant, en lui ajoutant un vecteur de même sens, de longueur proportionnelle à l'accélération : c'est le ***vecteur-accélération*** $\vec{\gamma}$.

1. Nous n'avons à considérer ici que la valeur positive de la vitesse.

En un point quelconque M de la trajectoire (fig. 2), nous représen-

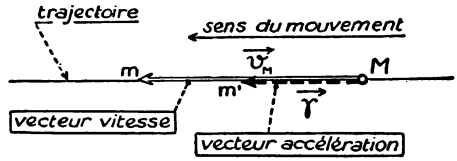


Fig. 2. — Dans un mouvement uniformément accéléré le vecteur-accélération est constant en direction sens et grandeur.

terons à la même échelle le vecteur vitesse en M et le vecteur-accélération.

II. — REPRÉSENTATION GRAPHIQUE DES LOIS DU MOUVEMENT

Étudions le cas particulier d'un mouvement où :

$$\gamma = 3\ m/s/s \quad ; \quad v_t = 3\ t \quad ; \quad e_t = 1{,}5\ t^2.$$

4. Diagramme de l'accélération.

Traçons deux axes de coordonnées. L'axe horizontal est l'axe des temps, l'axe vertical celui des accélérations.

L'accélération étant *constante*, son diagramme est une droite parallèle à l'axe des temps (fig. 3).

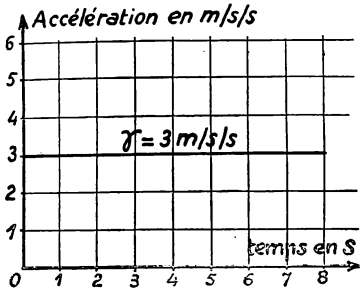


Fig. 3. — **Diagramme de l'accélération** d'un mouvement uniformément accéléré.

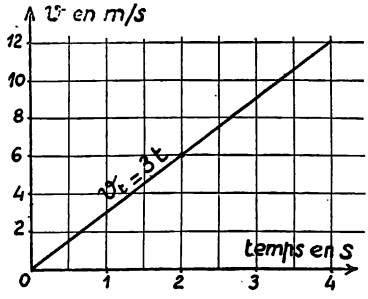


Fig. 4. — **Diagramme de la vitesse** d'un mouvement uniformément accéléré.

5. Diagramme des vitesses.

La formule $v_t = 3t$ montre que la vitesse v_t est une fonction du 1er degré de la variable t.

Dans un système de coordonnées rectangulaires où les temps sont portés en abscisses et les vitesses en ordonnées, les valeurs de la vitesse sont représentées par une droite qui passe par l'origine (fig. 4).

6. Diagramme des espaces.

L'expression $e_t = 1{,}5t^2$, semblable à $y = ax^2$, montre que l'espace e_t est une fonction du 2e degré de la variable t. Nous ne considérons ici que les valeurs positives du temps, c'est-à-dire celles qui viennent ***après l'instant initial*** (qui est ici l'instant de départ).

Calculons les espaces parcourus aux instants 1, 2, 3, 4 *secondes*.

$e_1 = 1{,}5\ m$; $e_2 = 6\ m$; $e_3 = 13{,}5\ m$; $e_4 = 24\ m$.

Les points correspondants du diagramme sont A, B, C, D (fig. 5).

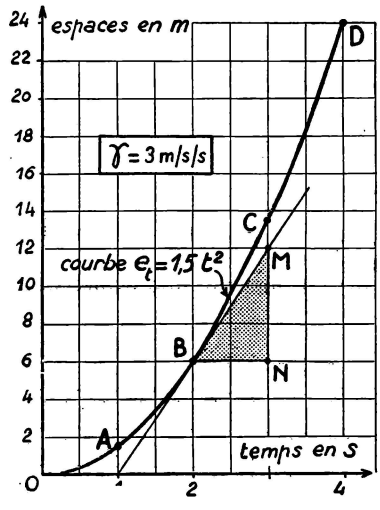


Fig. 5. — **Diagramme des espaces.** Le segment MN mesure 15 *mm*. Or 5 *mm* de l'échelle des espaces représentent 2 *mètres*. Le segment MN, *mesuré à l'échelle des espaces*, représente donc la vitesse à l'instant 2, soit 6 *m/s*.

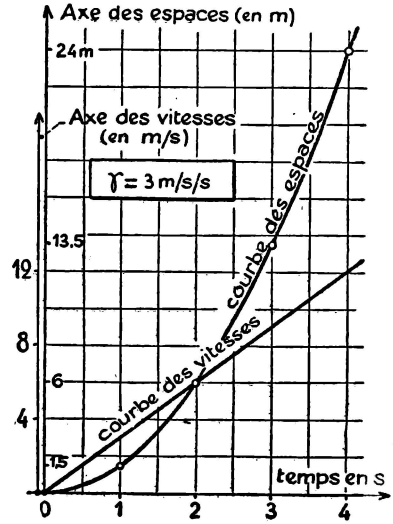


Fig. 6. — On peut tracer sur le même diagramme la courbe des vitesses et celle des espaces.

La courbe représentative de l'espace est un *arc de parabole*, tangent en O à l'axe des temps.

REMARQUE 1. — On trace souvent sur le même diagramme la droite des vitesses et la courbe des espaces (fig. 6). L'échelle des temps est alors la même pour les deux diagrammes superposés, mais l'échelle des espaces et celle des vitesses peuvent être différentes.

REMARQUE 2. — *Il ne faut pas confondre la courbe des espaces (parabole) avec la trajectoire qui est rectiligne.*

7. La vitesse peut se mesurer sur le diagramme des espaces.

Considérons le diagramme de la figure 5. Menons en B, point figuratif de l'espace parcouru à l'instant 2, la tangente à la courbe des espaces. Elle coupe en M la parallèle à l'axe des ordonnées menée par le point correspondant à l'instant 3.

Dans le triangle rectangle MNB nous vérifions *graphiquement* que le nombre qui mesure le segment MN *à l'échelle des espaces*, est égal au nombre qui mesure la vitesse à l'instant 2, soit $v_2 = 3 \times 2 = 6\ m/s$.

La même construction répétée pour les points A, C, D, permet de trouver la vitesse à chacun des instants 1, 3, 4..... [1]

8. L'espace parcouru est proportionnel à une aire mesurée sur le diagramme des vitesses.

Remarquons tout d'abord que la formule $e_t = \frac{1}{2}\gamma t^2$ peut s'écrire :

$e_t = \frac{1}{2} \times \gamma t \times t$, ou en remplaçant γt par v_t : $e_t = \frac{1}{2} v_t\, t$.

Considérons le diagramme de la figure 7 dont les échelles des temps et des vitesses sont respectivement :

échelle des temps :
l mm pour 1 *seconde*
échelle des vitesses :
l' mm pour 1 *m/s*

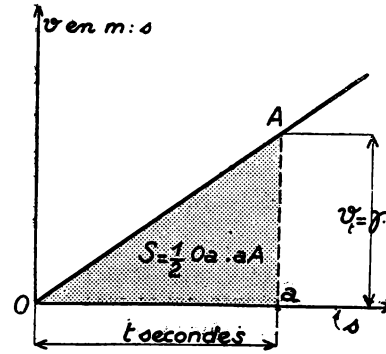


Fig. 7. — L'*espace parcouru* à l'instant *est proportionnel* à l'aire S.

Le point A figuratif de la vitesse v_t à l'instant t est tel que :

$$Oa = l \times t \quad ; \quad aA = l' \times v_t$$

L'aire S du triangle OaA a pour expression :

$$S = \frac{1}{2} \times Oa \times aA = \frac{1}{2} ll' \times v_t\, t \quad \text{ou encore :} \quad S = ll' \times e_t$$

1. Nous donnerons la démonstration de cette propriété dans la 11e Leçon.

D'où $$e_t = \frac{S}{ll'}$$

L'espace parcouru est donc bien proportionnel à une aire mesurée sur le diagramme des vitesses puisque ll' est une constante.

9. Mesure, sur le diagramme des vitesses, de la vitesse moyenne entre deux instants t et t'.

Nous avons établi que la vitesse moyenne dans l'intervalle de temps $(t' - t)$ a pour expression : $v_{moy} = a\,(t' + t)$, soit en remplaçant a par $\frac{1}{2}\gamma$:

$$v_{moy} = \frac{1}{2}\gamma\,(t' + t) = \frac{\gamma t' + \gamma t}{2}.$$

Or $\gamma t'$ est la vitesse à l'instant t' et γt la vitesse à l'instant t. Ces deux

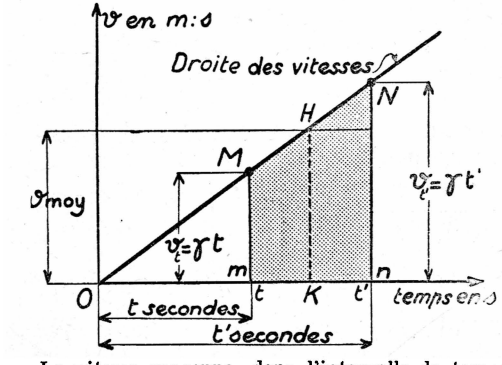


Fig. 8. — La vitesse moyenne, dans l'intervalle de temps $(t' - t)$, est représentée par HK. Démontrez-le.

valeurs de la vitesse sont représentées sur le diagramme de la figure 8 par les segments nN et mM.

Il en résulte que la vitesse moyenne est représentée par le segment HK qui joint les milieux des côtés non parallèles du trapèze rectangle nNMm.

Résumé.

1. Lorsqu'un point partant du repos prend un mouvement uniformément accéléré, l'espace parcouru e_t et la vitesse v_t à un instant quelconque t, sont donnés par les formules :

$$\boxed{e_t = \frac{1}{2}\gamma t^2} \qquad \boxed{v_t = \gamma t}$$

dans lesquelles γ représente l'*accélération constante* du mouvement.

2. La vitesse v s'exprime en fonction de l'espace parcouru e depuis l'instant initial

$$v = \sqrt{2\gamma e}$$

3. Le diagramme de l'accélération est une droite parallèle à l'axe des temps.
Le diagramme des vitesses une droite passant par l'origine des coordonnées.
Le diagramme des espaces est un arc de parabole tangent à l'axe des temps, à l'origine des coordonnées.

4. On peut mesurer graphiquement la vitesse à un instant quelconque t sur le diagramme des espaces.

Exercices.

1. Une automobile partant du repos prend, pendant les 8 premières secondes, un mouvement rectiligne uniformément accéléré ($\gamma = 2$ *m/s/s*). Calculer :
1° la vitesse au bout de la 3e *seconde ;*
2° l'espace parcouru correspondant ;
3° la vitesse de la voiture lorsque celle-ci aura parcouru 144 *mètres.*
Tracer sur du papier millimétré les diagrammes des vitesses et des espaces *(choisir les échelles des temps, des espaces et des vitesses).*

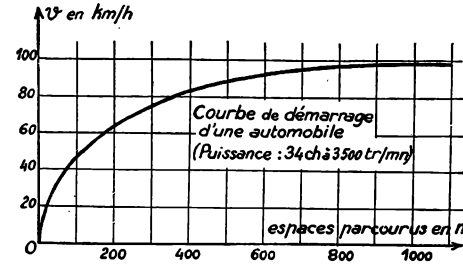


Fig. 9. — Dites quelle a été la vitesse de l'automobile lorsqu'elle a parcouru 100 *m*, 200 *m*,... etc

2. Calculer l'accélération en *m/s/s* d'un point mobile qui, animé d'un mouvement uniformément accéléré, sans vitesse initiale, a parcouru 120 *mètres* en 10 *secondes.* Quelle est sa vitesse en *m/s* et en *km/h* au bout de ce temps?

3. Montrer que, dans un mouvement uniformément accéléré, la courbe qui représente les variations de la vitesse en fonction de l'espace parcouru est une parabole. En lisant le diagramme de la figure 9, que peut-on dire du début du mouvement?

4. La figure 10 est le diagramme des espaces d'une automobile partant du repos.
1° Vérifier que les espaces sont sensiblement proportionnels aux carrés des temps employés à les parcourir. Que conclure?
2° L'espace parcouru au bout de 20 *secondes* est de 400 *mètres.* En déduire la valeur de l'accélération en *m/s/s.*
3° Quelle est la vitesse de la voiture à la fin de la 2e *seconde : a)* en *m/s ; b)* en *km/h?*

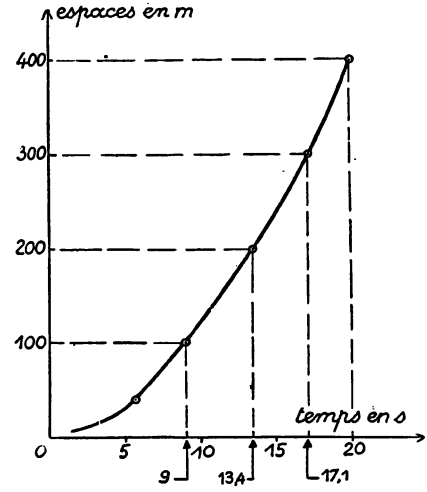


Fig. 10.

5. En partant de l'expression $v_{moy} = \frac{e_{t'} - e_t}{t' - t}$ montrer à l'aide du diagramme de la figure 8 :

1° Que la différence $(e_{t'} - e_t)$ est proportionnelle à l'aire du trapèze nNMm ;

2° Que la vitesse moyenne est bien représentée par la base moyenne HK de ce trapèze.

6. Deux mobiles partent d'un même point A et parcourent dans le même sens la même trajectoire. Le premier est animé d'une *vitesse constante* $v = 12$ *m/s*. Le second part 3 *secondes* après le premier, d'un *mouvement uniformément accéléré* (*vitesse initiale nulle : accélération :* 8 *m/s/s*).

1° Déterminer l'instant de la rencontre (*Origine des temps :* l'instant du départ du 1er mobile).

2° A quelle distance de A se produira la rencontre?

3° Quelle sera la vitesse de chaque mobile à cet instant?

4° Retrouver graphiquement les résultats précédents.

7. Une automotrice sur voie ferrée part du repos et prend, pendant les 40 premières secondes, un mouvement uniformément accéléré. Sachant que l'accélération est de 0,5 *m/s/s*, calculer :

1° L'espace parcouru correspondant;

2° La vitesse à la fin de la 40e seconde, exprimée en *km/h*.

3° Tracer les diagrammes de la vitesse et de l'espace sur du papier **millimétré.** On adoptera les échelles suivantes :

Échelles { des *temps :* 2 *mm* pour 1 *s ;* des *vitesses :* 2 *mm* pour 1 *m/s ;* des *espaces :* 3 *mm* pour 10 *m*.

Mouvement rectiligne uniformément accéléré
(AVEC VITESSE INITIALE)

1. Fait d'observation.

Rappelons que le mouvement du centre d'une bille qui roule sur un plan incliné est rectiligne, uniformément accéléré.

Imaginons que l'on commence à compter le temps à partir de l'instant où la bille passe devant un repère marqué sur le plan de roulement.

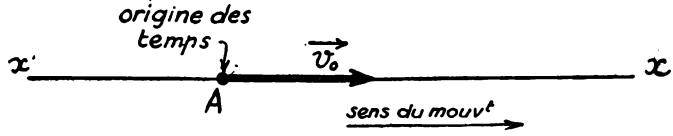


Fig. 1. — Le point mobile a une vitesse v_0 à l'instant choisi comme origine des temps.

Il en résulte qu'à l'instant zéro le centre de la bille a une certaine vitesse v_0 qu'on appelle ***vitesse initiale*** (fig. 1).

Nous nous proposons d'étudier les lois du mouvement à partir de cet instant.

2. Loi et diagramme de l'accélération.

Le mouvement étant uniformément accéléré, *l'accélération est constante :*

$$\gamma = \textit{Constante} \qquad (1)$$

Par exemple, $\gamma = 3\ m/s/s$. Le diagramme correspondant est une droite parallèle à l'axe des temps (fig. 2).

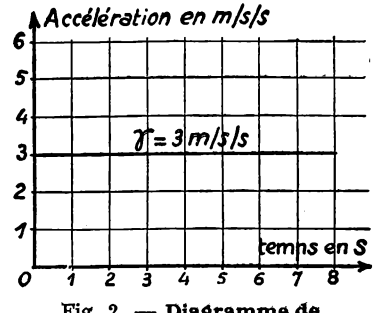


Fig. 2. — **Diagramme de l'accélération.**

3. Loi et diagramme des vitesses.

Supposons qu'à l'instant initial la vitesse du point mobile soit $v_0 = 5\ m/s$.

Pendant chaque seconde, la vitesse augmente de 3 m/s. Dressons le tableau des vitesses à divers instants :

$t_0 = 0$	$v_0 =$		$5\ m/s$
$t_1 = 1\ s$	$v_1 = 5 + 3 \times 1 =$		$8\ m/s$
$t_2 = 2\ s$	$v_2 = 5 + 3 \times 2 =$		$11\ m/s$
$t_3 = 3\ s$	$v_3 = 5 + 3 \times 3 =$		$14\ m/s$

Nous reconnaissons qu'ici, au bout de t secondes, la vitesse v_t est donnée par la formule : $v_t = 5 + 3t$.

GÉNÉRALISONS. — Si v_0 désigne la vitesse à l'instant initial, γ l'accélération constante du mouvement, la vitesse v_t à l'instant t est donnée par la formule :

$$v_t = v_0 + \gamma t \qquad (2)$$

Elle exprime que *la vitesse à l'instant* t *est égale à la vitesse initiale, augmentée de l'accroissement de vitesse* γt *dû à l'accélération.*

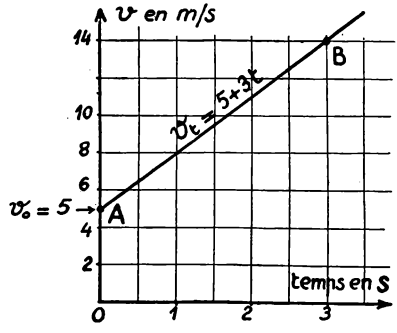


Fig. 3. — **Diagramme de la vitesse** d'un mouvement uniformément accéléré dont la *vitesse initiale* est $v_0 = 5\ m/s$.

La vitesse v_t est encore une fonction du 1er degré de la variable t; son diagramme est donc une droite. Il suffit, pour la tracer, de déterminer deux de ses points.

Prenons le cas particulier :

$$v_t = 5 + 3\ t.$$

Pour $t = 0$, $v_0 = 5\ m/s$: d'où le point A de l'axe des vitesses (fig. 3).

Pour $t = 3\ s$, $v_3 = 14\ m/s$: d'où le point B.

La droite AB est la droite cherchée.

REMARQUE. — Soient A, B, C, D les positions du mobile aux instants 0, 1 s, 2 s, 3 s. A *la même échelle*, traçons en ces points les vecteurs vitesses correspondants (fig. 4). On voit facilement qu'on passe d'un vecteur quelconque au suivant en lui ajoutant un vecteur de même sens et de longueur proportionnelle à l'accélération : c'est le ***vecteur accélération*** *qui a même sens que le vecteur vitesse initiale* $\overrightarrow{v_0}$.

4. Loi des espaces.

Prenons, comme *origine des espaces*, le point A de la trajectoire qui correspond à l'origine des temps et soit e_t l'espace parcouru à l'instant t.

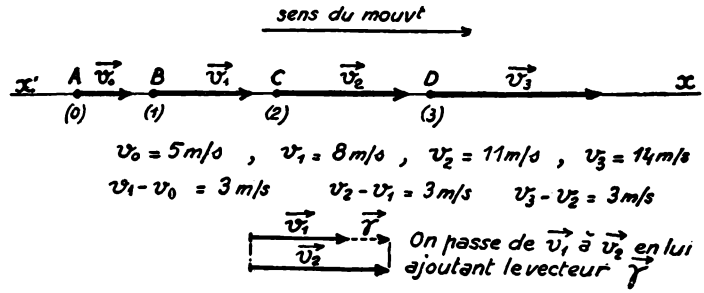


Fig. 4. — Expliquez d'après cette figure le caractère d'un mouvement uniformément accéléré de vitesse initiale v_0.

Nous pouvons écrire : $e_t = v_{moy} \times t$.
Or, sur le diagramme des vitesses de la figure 5, la vitesse moyenne

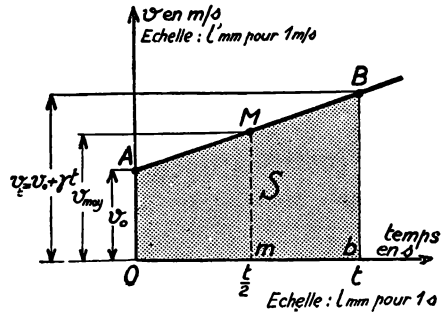


Fig. 5. — *L'espace parcouru* à l'instant *t est proportionnel* à l'aire S.

dans l'intervalle de temps compris entre 0 et t est représentée par la base moyenne du mM du trapèze OABb.

$$v_{moy} = m\mathrm{M} = \frac{\mathrm{OA} + b\mathrm{B}}{2} = \frac{v_0 + (v_0 + \gamma t)}{2}$$

ou
$$v_{moy} = v_0 + \frac{\gamma t}{2}$$

Par suite
$$e_t = v_{moy} \times t = \left(v_0 + \frac{\gamma t}{2}\right) t$$

ou
$$e_t = v_0 t + \frac{1}{2} \gamma t^2 \qquad (3)$$

Cette formule traduit la loi des espaces que nous cherchons. *L'espace e parcouru à l'instant t est la somme de deux termes :*

1° *le terme* $v_0 t$, *qui représente l'espace que parcourrait le point mobile s'il avait un mouvement uniforme de vitesse constante* v_0;

2° *le terme* $\frac{1}{2}\gamma t^2$, *qui est l'espace que parcourrait le mobile s'il partait du repos, d'un mouvement uniformément accéléré.*

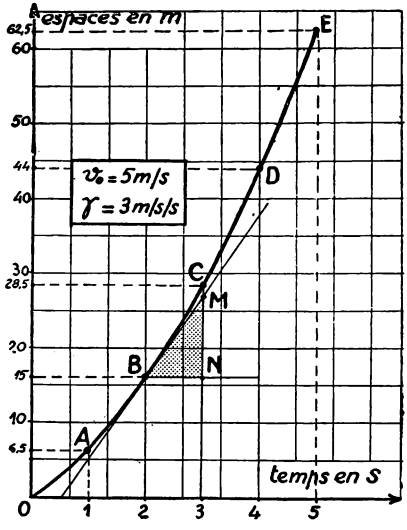


Fig. 6. — **Diagramme des espaces** du mouvement $e_t = 5\,t + 1{,}5\,t^2$.
Mesurez NM. Vérifiez qu'il représente, à l'échelle des espaces, la vitesse à l'instant 2.

Remarque. — Si, à l'instant initial, le mobile est à une distance e_0 du point choisi comme origine des espaces, il est clair que la formule des espaces doit s'écrire :

$$e_t = e_0 + v_0 t + \frac{1}{2}\gamma t^2 \quad (4)$$

5. Diagramme des espaces dans le cas d'un espace initial nul.

Reprenons l'exemple numérique d'un mobile animé d'un mouvement rectiligne uniformément accéléré défini par :

$$\gamma = 3\ m/s/s \qquad v_0 = 5\ m/s \qquad e_0 = 0$$

La loi particulière des espaces est :

$$e_t = 5\,t + 1{,}5\,t^2.$$

Nous aurons successivement :

$e_0 =$ 0 m par convention
$e_1 = 5 \times 1 + 1{,}5 \times 1^2 =$ 6,5 m
$e_2 = 5 \times 2 + 1{,}5 \times 2^2 =$ 16 m
$e_3 = 5 \times 3 + 1{,}5 \times 3^2 =$ 28,5 m
$e_4 = 5 \times 4 + 1{,}5 \times 4^2 =$ 44 m.

Les points figuratifs correspondants, A, B, C, D, sont sur un *arc de parabole* passant par l'origine des coordonnées (fig. 6), *mais qui n'est pas tangent en ce point à l'axe des temps.*

Remarque. — Ainsi qu'il a déjà été indiqué dans la leçon précédente, la vitesse à la fin de la 2e seconde, par exemple, est mesurée à l'*échelle des espaces* par la longueur du segment MN (fig. 6).

Sur le diagramme on trouve MN = 11 *mm*. Or 1 *mm* de l'*échelle des espaces* représente 1 *mètre*. La vitesse : $v_2 = 11\ m/s$.

Il est évident que si l'on mesure par le même procédé la vitesse à l'instant 0, on doit trouver $v_0 = 5$ *m/s*, ce qui permet de trouver l'angle de la tangente à la parabole au point O avec l'axe des abscisses.

6. La vitesse v peut s'exprimer en fonction de l'accélération et de l'espace parcouru e.

De l'équation $v_t = v_0 + \gamma t$ nous tirons : $t = \dfrac{v_t - v_0}{\gamma}$.

Portons cette valeur de t dans la relation (3)

$$e_t = v_0 t + \frac{1}{2}\gamma t^2 = v_0\left(\frac{v_t - v_0}{\gamma}\right) + \frac{1}{2}\gamma\left(\frac{v_t - v_0}{\gamma}\right)^2 = \frac{v_t^2}{2\gamma} - \frac{v_0^2}{2\gamma}$$

d'où : $$v_t^2 = v_0^2 + 2\gamma e_t.$$

Nous voyons que lorsque le mobile a parcouru un espace e, à partir de l'instant initial, sa vitesse est :

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2\gamma e} \qquad (5)$$

EXEMPLE NUMÉRIQUE. — *Un point mobile a une vitesse de* 10 *m/s à l'origine des temps. Son mouvement est uniformément accéléré et l'accélération est de* 1 *m/s/s. Quelle est sa vitesse lorsqu'il a parcouru* 22 *mètres?*

Employons comme unités le *mètre* et la *seconde*.

Ici : $v_0 = 10$; $\gamma = 1$; $e = 22$.
D'où : $v^2 = 10^2 + 2 \times 1 \times 22 = 144$
Soit : $v = 12$ *m/s*

7. L'espace parcouru à l'instant t est proportionnel à une aire mesurée sur le diagramme des vitesses.

Montrons en effet, sur le diagramme de la figure 5, que l'espace e_t parcouru à l'instant t est proportionnel à l'aire S du trapèze OABb.

$$S = \frac{OA + bB}{2} \times Ob.$$

Les échelles du diagramme sont respectivement :

échelle des temps: l mm pour 1 *s.*
échelle des espaces: l' mm pour 1 *m/s.*

OA qui représente v_0 a pour longueur en millimètres : $OA = l' \times v_0$.
bB qui représente la vitesse v_t à l'instant t a pour mesure en millimètres :

$$bB = l'(v_0 + \gamma t).$$

Enfin $$Ob = l \times t.$$

Par suite :

$$S = \frac{l'v_0 + l'(v_0 + \gamma t)}{2} \times lt = ll'\left(v_0 t + \frac{1}{2}\gamma t^2\right) = ll' \times e_t.$$

L'espace $e_t = \dfrac{S}{ll'}$ est bien proportionnel à l'aire S puisque $ll' =$ *constante.*

Résumé.

1. Lorsqu'un point mobile est animé d'un mouvement rectiligne uniformément accéléré de vitesse initiale v_0.

1° l'accélération est : $\boxed{\gamma = \textit{Constante}}$

2° la vitesse à l'instant t est : $\boxed{v_t = v_0 + \gamma t}$

3° l'espace parcouru à l'instant t est :

$$\boxed{e_t = v_0 t + \frac{1}{2}\gamma t^2} \quad \textit{(espace initial nul) ou} \quad \boxed{e_t = e_0 + v_0 t + \frac{1}{2}\gamma t^2}$$

2. Lorsque le mobile a parcouru un espace e, depuis l'instant initial, la vitesse v correspondante est :

$$\boxed{v = \sqrt{v_0^2 + 2\gamma e}}$$

3. Le diagramme de l'accélération est une droite parallèle à l'axe des temps; celui des vitesses une droite qui ne passe pas par l'origine des coordonnées.
Le diagramme des espaces est un arc de parabole qui passe par l'origine des coordonnées.

Exercices.

1. Une automobile roule en palier à la vitesse de 72 *km/h*. Le conducteur appuie sur l'accélérateur et la vitesse croît uniformément pendant 10 *secondes* jusqu'à 108 *km/h*, puis reste stationnaire.
1° Quelle est la nature du mouvement pendant ces 10 secondes?
2° Calculer l'accélération en *m/s/s*.
3° Quelle est la distance parcourue pendant cet intervalle de temps?
4° Quelle est en *m/s*, en *km/h*, la vitesse de l'automobile quand l'espace parcouru est 225 *mètres?* Au bout de combien de temps cette vitesse est-elle atteinte?

2. Tracer sur du papier millimétré les diagrammes des vitesses et des espaces relatifs au problème précédent.

Échelle des temps : 1 *cm* pour 1 *seconde.*
Échelle des vitesses : 1 *cm* pour 4 *m/s.*
Échelle des espaces : 1 *cm* pour 20 *mètres.*

(Les deux courbes seront tracées sur le même graphique.)

3. Expliquez pourquoi, sur la figure 6, l'arc de parabole n'est pas, à l'origine des coordonnées, tangent à l'axe des temps.
Calculez en degrés, *en tenant compte des échelles*, l'angle que fait, avec l'axe des temps, la tangente à l'axe de parabole menée par l'origine des coordonnées.

4. Le mouvement rectiligne uniformément accéléré d'un point mobile est défini de la manière suivante :

$$\gamma = 1 \ m/s/s; \quad v_0 = 0{,}75 \ m/s; \quad e_0 = 4 \ m.$$

Dresser les diagrammes de l'accélération, de la vitesse, de l'espace parcouru, pour les 15 premières secondes du mouvement. (*Choisir les échelles.*)

Mouvement rectiligne uniformément retardé.

1. Faits d'observation.

Lorsque le conducteur d'une automobile freine, le véhicule ralentit et s'arrête. De même le moteur électrique, qui cesse d'être alimenté par le courant, tourne de moins en moins vite jusqu'à l'arrêt. De tels faits nous donnent l'idée du *mouvement retardé*, c'est-à-dire du mouvement dans lequel la vitesse décroît.

2. Définition du mouvement uniformément retardé. Décélération.

Un mouvement est uniformément retardé lorsque la vitesse décroît, pendant chaque unité de temps, d'une quantité constante.

Cette quantité constante est appelée décélération.

Nous désignerons encore la décélération par la lettre γ, car nous verrons plus loin qu'on peut la considérer comme une *accélération négative*.

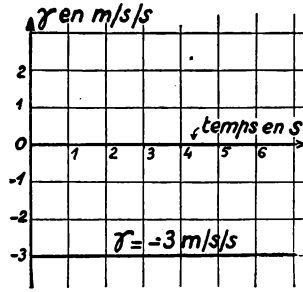


Fig. 1. — **Diagramme de la décélération** (accélération négative, c'est-à-dire de sens contraire à la vitesse initiale).

$$\gamma = \textit{Constante} \qquad (1)$$

La figure 1 représente le diagramme de la décélération d'un mouvement uniformément retardé dans lequel $\gamma = 3\ m/s/s$.

3. Formule des vitesses.

Considérons un point mobile animé d'un mouvement rectiligne uniformément retardé. Soit v_0 sa vitesse initiale. Elle est représentée au point A de la trajectoire $x'x$ par un vecteur $\overrightarrow{v_0}$ (fig. 2).

Supposons que $v_0 = 12\ m/s$ et que $\gamma = 3\ m/s/s$. Pendant chaque seconde la vitesse diminue de 3 m/s, elle prend donc les valeurs suivantes :

$t_0 = 0$	$v_0 = 12\ m/s$
$t_1 = 1\ s$	$v_1 = 12 - 3 \times 1 = 9\ m/s$
$t_2 = 2\ s$	$v_2 = 12 - 3 \times 2 = 6\ m/s$
$t_3 = 3\ s$	$v_3 = 12 - 3 \times 3 = 3\ m/s$
$t_4 = 4\ s$	$v_4 = 12 - 3 \times 4 = 0\ m/s$

Au bout de 4 *secondes* la vitesse s'annule. Nous étudierons le mouvement jusqu'à cet instant.

Nous reconnaissons qu'à un instant quelconque t, compris entre 0 et 4 secondes, la vitesse v_t s'exprime à l'aide de la formule $v_t = 12 - 3t$.

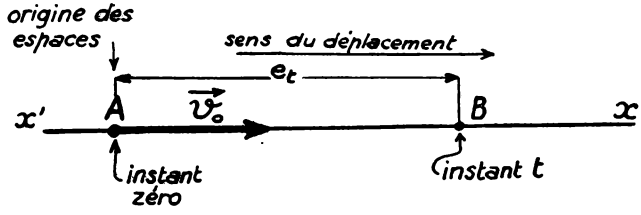


Fig. 2. — A l'instant zéro, le mobile est à l'origine des espaces. Sa vitesse initiale est v_0 et son mouvement est uniformément retardé.

GÉNÉRALISONS. — Si v_0 désigne la vitesse à l'instant initial et γ la décélération constante du mouvement, la vitesse v_t à l'instant t a pour expression :

$$v_t = v_0 - \gamma t \qquad (2)$$

Cette vitesse s'annule lorsque $v_0 - \gamma t = 0$, *c'est-à-dire au bout d'un temps*

$$t = \frac{v_0}{\gamma} \qquad (3)$$

4. Diagramme des vitesses.

La formule (2) exprime que la vitesse v_t est une fonction du 1er degré de la variable t. Le diagramme des vitesses est donc une droite définie par deux de ses points.

La figure 3 est le diagramme des vitesses d'un mouvement uniformément retardé où $v_t = 12 - 3t$. *Il représente les variations de la vitesse entre l'instant initial et l'instant* t *où la vitesse s'annule.*

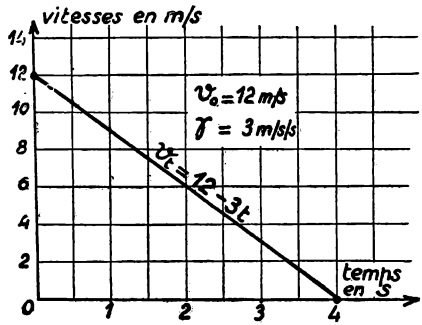


Fig. 3. — **Diagramme de la vitesse** d'un mouvement uniformément retardé.

Pour $t = 0$ s $\quad v_0 = 12$ m/s
Pour $t = 4$ s $\quad v_4 = 0$ m/s

REMARQUE. — Soient A, B, C, D les positions du point mobile aux instants 0, 1 *s*, 2 *s*, 3 *s*. En chacune d'elles, traçons *à la même échelle*, les vecteurs-vitesses correspondants (fig. 4).

On voit qu'on passe d'un vecteur quelconque au suivant en lui

ajoutant un vecteur de *sens contraire*, de longueur proportionnelle à la décélération et qu'on appelle ***vecteur décélération.***

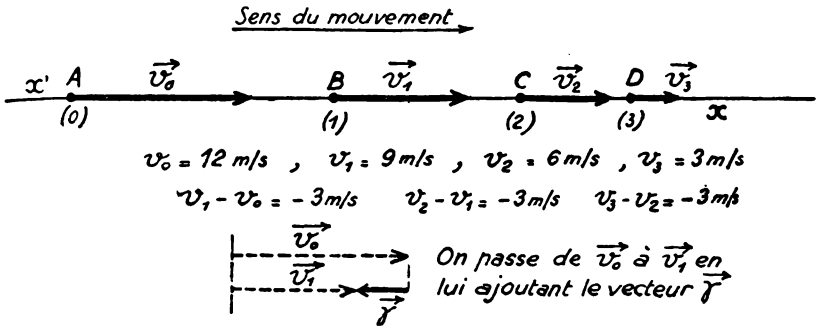


Fig. 4. — Expliquez sur cette figure le caractère d'un mouvement uniformément retardé.

Dans un mouvement rectiligne uniformément retardé, le vecteur décélération $\vec{\gamma}$ *est donc de sens contraire au vecteur vitesse initiale* $\vec{v_0}$.

5. Formule des espaces.

Prenons comme *origine des espaces* le point A correspondant à l'origine des temps (fig. 1). Soit e_t l'espace parcouru à l'instant t :

$$e_t = v_{moy} \times t.$$

Or, sur le diagramme des vitesses de la figure 5, la vitesse moyenne dans l'intervalle de temps compris entre 0 et t, est représentée par la base moyenne mM du trapèze OABb.

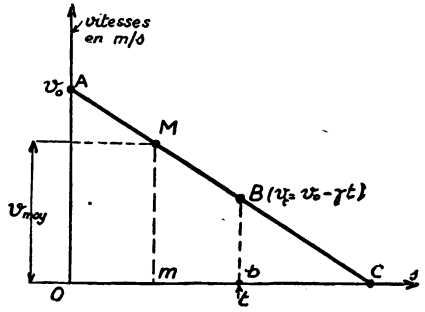


Fig. 5. — La vitesse moyenne dans l'intervalle de temps (o, t) a pour valeur $\frac{v_t + v_0}{2}$

$$v_{moy} = mM = \frac{OA + bB}{2} = \frac{v_0 + (v_0 - \gamma t)}{2} = v_0 - \frac{\gamma t}{2}.$$

Il en résulte que : $e_t = v_{moy} \times t = \left(v_0 - \frac{\gamma t}{2}\right) t$

ou

$$e_t = v_0 t - \frac{1}{2} \gamma t^2 \qquad (4)$$

Cette formule montre que l'espace parcouru à l'instant t est la *différence* de deux termes :

1° *le terme* $v_0 t$, *qui représente l'espace qui serait parcouru s'il n'y avait pas décélération;*

2° *le terme* $\frac{1}{2}\gamma t^2$, *qui est l'espace que parcourrait le mobile s'il était soumis à la décélération seule.*

REMARQUE. — Si l'origine des espaces est différente du point correspondant à l'origine des temps, et si e_0 représente l'*espace initial*, il est évident que l'espace parcouru à l'instant t a pour expression :

$$e_t = e_0 + v_0 t - \frac{1}{2}\gamma t^2.$$

6. Diagramme des espaces.

Reprenons l'exemple numérique :

$$\gamma = 3 \ m/s/s; \quad v_0 = 12 \ m/s; \quad e_0 = 0$$

La formule des espaces s'écrit $e_t = 12\,t - 1{,}5\,t^2$. La vitesse s'annule au bout de 4 *secondes*. Calculons les espaces parcourus aux instants 0, 1 *s*, 2 *s*, 3 *s*, 4 *s* :

$e_0 = 0$	$e_3 = 22{,}5 \ m$
$e_1 = 10{,}5 \ m$	$e_4 = 24 \ m$
$e_2 = 18 \ m$	

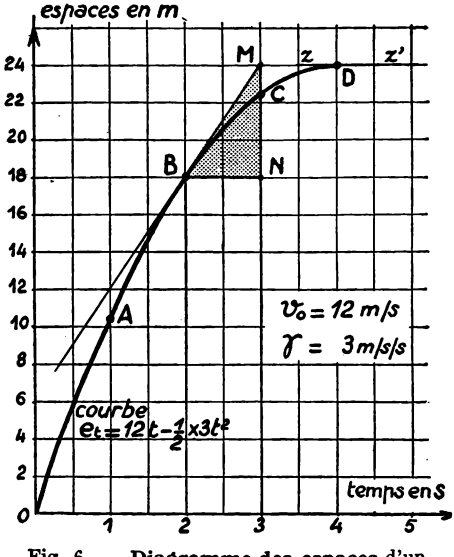


Fig. 6. — **Diagramme des espaces** d'un mouvement uniformément retardé.
Le segment NM mesure, *à l'échelle des espaces*, la vitesse à l'instant 2 : ici 6 *m/s*.

A ces valeurs correspondent les points O, A, B, C, D du diagramme de la figure 6. Ils appartiennent à une *parabole* de sommet D, tangente en ce point à la parallèle *zz'* à l'axe des temps.

REMARQUE 1. — Nous pouvons mesurer la vitesse à un instant quelconque sur le diagramme des espaces. Par exemple, la vitesse à l'instant 2 est mesurée, *à l'échelle des espaces*, par le côté MN du triangle rectangle BMN. On vérifie bien qu'à l'instant $t = 4$ la vitesse est nulle.

REMARQUE 2. — On montrerait, comme on l'a fait dans la

6e Leçon, que l'espace parcouru à l'instant t est proportionnel à l'aire du trapèze OABb (fig. 5).

7. La vitesse v peut s'exprimer en fonction de la décélération γ et de l'espace parcouru e.

Nous avons montré que dans le mouvement rectiligne uniformément retardé, la vitesse décroît de v_0 à 0. Soit $v_t = v_0 - \gamma t$ une valeur quelconque de la vitesse, comprise entre v_0 et 0. Elle est atteinte au bout d'un temps t tel que

$$t = \frac{v_t - v_0}{\gamma}.$$

Portons cette valeur de t dans l'expression $e_t = v_0 t - \frac{1}{2}\gamma t^2$.

$$e = v_0\left(\frac{v_t - v_0}{\gamma}\right) - \frac{1}{2}\gamma\left(\frac{v_t - v_0}{\gamma}\right)^2.$$

D'où l'on tire : $v_t^2 = v_0^2 - 2\gamma e_t$.

Nous voyons que lorsque le mobile a parcouru un espace e, depuis l'instant initial, sa vitesse v est :

$$v = \sqrt{v_0^2 - 2\gamma e} \qquad (5)$$

En particulier, quand $v = 0$, $\quad v_0^2 - 2\gamma e = 0.$

D'où : $$e = \frac{v_0^2}{2\gamma} \qquad (6)$$

Cette dernière formule (6) exprime *l'espace parcouru par le point mobile entre l'instant initial et l'instant où sa vitesse s'annule*, c'est-à-dire pendant le temps $t = \frac{v_0}{\gamma}$ (Formule 3).

EXEMPLE NUMÉRIQUE. — *A l'instant initial, la vitesse d'un mobile est de* 20 *m/s. Le mouvement est uniformément retardé et la décélération est* 2 *m/s/s. Calculer l'espace parcouru lorsque la vitesse s'annule.*

Prenons pour unités le *mètre* et la *seconde* :

$$v_0 = 20 \qquad \gamma = 2.$$

Par suite : $$e = \frac{20^2}{2 \times 2} = \textbf{100 mètres.}$$

8. La décélération est une accélération négative.

Les équations du mouvement uniformément retardé :

$$v_t = v_0 - \gamma t \qquad e_t = v_0 t - \frac{1}{2}\gamma t^2 \qquad v_t^2 = v_0^2 - 2\gamma e_t$$

peuvent être considérées comme dérivant des équations du mouvement uniformément accéléré :

$$v_t = v_0 + \gamma t \qquad e_t = v_0 t + \frac{1}{2}\gamma t^2 \qquad v_t^2 = v_0^2 + 2\gamma e_t.$$

par le changement de γ en $-\gamma$.

C'est pourquoi *on dit que la décélération est une accélération négative.* Nous avons vu, d'autre part, que le vecteur qui la représente est de sens contraire au vecteur $\vec{v_0}$.

Résumé

1. Dans un mouvement uniformément retardé (*vitesse initiale* v_0).
1°) la *décélération* γ ou diminution de la vitesse par unité de temps est *constante*.
2°) la vitesse v_t à l'instant t :

$$\boxed{v_t = v_0 - \gamma t}$$

Elle s'annule au bout d'un temps $t = \frac{v_0}{\gamma}$.

3°) l'espace parcouru à l'instant t

$$\boxed{e_t = v_0 t - \frac{1}{2}\gamma t^2} \quad \textit{(espace initial nul) ou} \quad \boxed{e_t = e_0 + v_0 t - \frac{1}{2}\gamma t^2}$$

2. La vitesse v s'exprime en fonction de l'espace parcouru e, depuis l'instant initial :

$$\boxed{v = \sqrt{v_0^2 - 2\gamma e}}$$

3. L'espace e parcouru entre l'instant initial et l'instant t où la vitesse s'annule a pour expression : $e = \frac{v_0^2}{2\gamma}$.

4. Le diagramme de l'accélération est une droite parallèle à l'axe des temps, celui des vitesses une droite.
Le diagramme des espaces est un arc de parabole.

Exercices

1. Un train roule à la vitesse de 72 *km /h* lorsqu'à l'approche d'une gare le mécanicien fait agir les freins. Le train s'arrête en 15 *secondes.*
En admettant que le mouvement soit uniformément retardé, calculer :
1° la décélération;
2° la distance parcourue depuis le début du freinage jusqu'à l'arrêt.

2. Dresser sur la même feuille le diagramme des espaces et le diagramme des vitesses relatifs au mouvement précédent.

Échelle des temps : 1 *cm* pour 1 *seconde.*
Échelle des vitesses : 1 *cm* pour 2 *m /s.*
Échelle des espaces : 1 *cm* pour 10 *mètres.*

3. Une automobile roule à la vitesse de 72 *km /h.* Le conducteur apercevant un obstacle freine. Depuis le début du freinage jusqu'à l'arrêt, la voiture parcourt 50 *mètres* d'un mouvement uniformément retardé. Calculer :
1° la décélération;
2° la durée du mouvement;
3° la vitesse au bout de la 2e seconde du ralentissement.

4. Tracer sur du papier millimétré la courbe des vitesses et la courbe des espaces relatives aux données du problème précédent.

Échelle des temps : 1 *cm* pour 1 *seconde.*
Échelle des espaces : 1 *cm* pour 4 *mètres.*
Échelle des vitesses : 1 *cm* pour 4 *m/s.*

5. Le mouvement d'une cage d'ascension dans un puits de mine comprend trois phases :

1re *phase :* mouvement uniformément accéléré; vitesse initiale nulle; vitesse finale : 20 *m/s ;* espace : 210 *mètres.*

2e *phase :* mouvement uniforme; vitesse 20 *m/s ;* espace : 80 *mètres.*

3e *phase :* mouvement uniformément retardé; vitesse initiale : 20 *m/s ;* vitesse finale nulle, la cage arrivant sans vitesse à l'orifice du puits; espace : 120 mètres.

1° Calculer la durée d'ascension dans la 1re phase et l'accélération correspondante;

2° Même question pour la 3e phase;

3° Quelle est la durée totale de la montée? Calculer la vitesse moyenne du mouvement de montée.

4° Construire le diagramme des vitesses :

Échelle des temps : 2 *mm* pour 1 *seconde.*
Échelle des vitesses : 2 *mm* pour 1 *m/s.*

5° Avec les mêmes axes, construire le diagramme des espaces.

Échelle des espaces : 3 *mm* pour 10 *mètres.*

6. Une automotrice sur voie ferrée part du repos et, après avoir parcouru 400 *m* d'un mouvement uniformément accéléré ($\gamma = 0{,}5$ *m/s/s*), roule d'un mouvement uniforme pendant 2 *mn*. Le mécanicien freine ensuite et l'automotrice s'arrête après avoir ralenti pendant 10 secondes d'un mouvement uniformément retardé. Calculer :

1° La durée de la période de démarrage, ainsi que la vitesse finale;

2° L'espace parcouru pendant le mouvement uniforme;

3° La décélération, l'espace parcouru pendant la période de ralentissement.

Tracer ensuite les diagrammes de la vitesse et de l'espace parcouru.

Échelles des temps : 1 *mm* pour 2 *s ;*
Échelle des vitesses : 1 *mm* pour 0,5 *m/s ;*
Échelles des espaces : 1 *mm* pour 20 *m.*

Application des lois du mouvement uniformément varié à la chute des corps.

1. Tous les corps lourds tombent suivant la verticale dont la direction est donnée par le fil à plomb.

Fig. 1. — **Expérience de Newton.** Tous les corps abandonnés à eux-mêmes tombent également vite dans le vide. Le morceau de papier, la bille de plomb, la plume arrivent en même temps au fond du tube.

Tombent-ils tous également vite? Les Anciens pensaient le contraire. C'est Galilée, qui, le premier, fit des expériences à la tour penchée de Pise : laissant tomber du haut de cet édifice des sphères de matières différentes : pierre, fer, bois,... il constata qu'elles arrivaient en même temps au sol.

Mais c'est Newton[1] qui, le premier, fit tomber des corps dans le vide (fig. 1) et énonça la loi fondamentale qui porte son nom :

Tous les corps, abandonnés en chute libre dans le vide, tombent également vite.

REMARQUE. — Dans l'air, cette loi n'est plus vraie : une feuille de papier et une balle de plomb, abandonnées en même temps à la même hauteur ne touchent pas le sol au même instant. La résistance de l'air intervient en effet pour freiner le mouvement; elle croît rapidement avec la vitesse et elle croît aussi avec la surface perpendiculaire à la direction du mouvement.

Dans ce qui suit, nous supposerons que cette résistance est négligeable : c'est le cas d'un corps lourd, de faible surface, dont la vitesse n'est pas très grande, c'est-à-dire dont la chute est de courte durée.

1. Newton, mathématicien anglais (1642-1727). Il s'est rendu célèbre par sa théorie de la composition de la lumière blanche et sa doctrine de l'attraction universelle.

I. — LE MOUVEMENT DE CHUTE LIBRE[1] EST UNIFORMÉMENT ACCÉLÉRÉ

Nous pouvons le prouver par diverses séries d'expériences.

2. Première série d'expériences : bille roulant sur un plan incliné.

EXPÉRIENCES. — Complétons les expériences faites précédemment. Nous donnons à l'inclinaison du plan de roulement des valeurs crois-

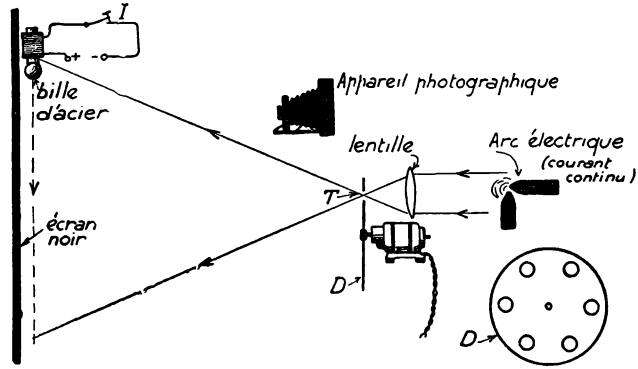


Fig. 2. — Expliquez d'après cette figure comment on peut photographier, à des intervalles de temps égaux, une bille qui tombe.

santes : la bille roule de plus en plus vite et nous constatons que *son mouvement est toujours uniformément accéléré.*

Nous en concluons que si l'angle devient égal à 90°, le mouvement reste uniformément accéléré. La bille tombe alors en chute libre.

3. Deuxième série d'expériences : enregistrement chronophotographique de la chute d'une bille.

REMARQUE PRÉALABLE. — Soit $e_t = 2\ t^2$ la loi d'un mouvement uniformément accéléré sans vitesse initiale. Dressons le tableau suivant :

1. Le mouvement de chute d'un corps peut être *gêné* par l'action d'une force autre que le poids : par exemple la résistance de l'air. Un corps tombe en chute *libre* quand il est soumis à la seule action de son poids.

TEMPS	ESPACES PARCOURUS	ESPACES PARCOURUS PENDANT LES SECONDES successives.
$t_0 = 0\ s$	$e_0 = 0\ m$	
$t_1 = 1\ s$	$e_1 = 2\ m$	$e_1 - e_0 = 2\ m$
$t_2 = 2\ s$	$e_2 = 8\ m$	$e_2 - e_1 = 6\ m$
$t_3 = 3\ s$	$e_3 = 18\ m$	$e_3 - e_2 = 10\ m$
$t_4 = 4\ s$	$e_4 = 32\ m$	$e_4 - e_3 = 14\ m$
$t_5 = 5\ s$	$e_5 = 50\ m$	$e_5 - e_4 = 18\ m$

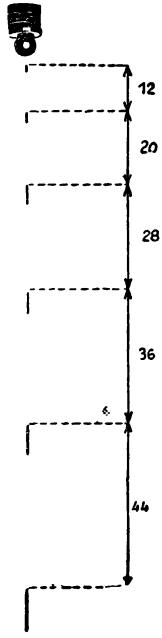


Fig. 3. — Les distances séparant les origines de deux *traînées* consécutives sont entre elles comme les nombres 12, 20, 28...

Nous constatons que les différences $(e_1 - e_0)$, $(e_2 - e_1)$, $(e_3 - e_2)$, $(e_4 - e_3)$, $(e_5 - e_4)$,... c'est-à-dire *les espaces parcourus pendant les secondes successives du mouvement considéré, croissent en* ***progression arithmétique*** *de raison* 4.

Réciproquement, si dans un mouvement rectiligne nous constatons que les espaces parcourus pendant des secondes successives croissent en progression arithmétique, ce mouvement est uniformément accéléré [1].

La même remarque est applicable au cas où le mobile a une vitesse initiale v_0.

EXPÉRIENCE. — Enregistrons, sur une plaque photographique, la chute libre d'une bille retenue primitivement par un électro-aimant. Le dispositif expérimental de la figure 2 montre la façon de procéder. On opère dans l'obscurité, la bille étant éclairée à intervalles régulièrement espacés dans le temps grâce à un disque D qui intercepte le faisceau lumineux d'un arc électrique.

L'image de la bille sur la plaque photographique se traduit par une série de traînées de plus en plus longues (fig. 3), car la vitesse augmentant à chaque instant, l'espace parcouru pendant la durée de chaque éclair devient de plus en plus grand.

En mesurant les distances qui séparent les origines de deux traînées successives, nous constatons qu'***elles croissent en progression arithmétique*** (fig. 3).

1. Nous laissons à l'élève le soin de le démontrer.

4. Troisième série d'expériences : chute d'une plaque devant une lame qui vibre.

EXPÉRIENCE 1. — Fixons une lame métallique (réglet d'ajusteur par

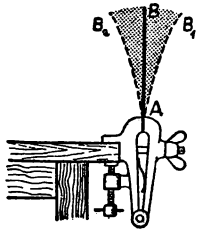


Fig. 4. — Une lame flexible serrée entre deux mâchoires d'étau vibre lorsqu'on l'abandonne après l'avoir écartée de sa position d'équilibre.

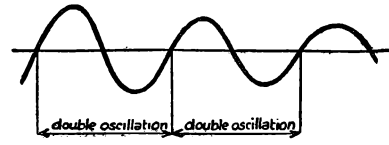


Fig. 5. — Voici la trace laissée par la pointe de la lame vibrante sur une plaque enfumée qui se déplace d'un mouvement uniforme : les oscillations sont **isochrones,** c'est-à-dire qu'elles ont la même durée.

exemple) entre deux mâchoires (fig. 4). En l'écartant de sa position initiale et en l'abandonnant ensuite, elle exécute une série d'oscillations dont l'amplitude va en décroissant.

On peut enregistrer ces oscillations sur une bande de papier enfumé qu'on déplace d'un mouvement rectiligne uniforme. On vérifie ainsi que la durée d'une double oscillation est constante (fig. 5).

EXPÉRIENCE 2. — Laissons tomber une plaque de verre enfumée devant une lame vibrante, munie d'un style inscripteur (fig. 6) [1].

Nous obtenons une courbe telle que celle de la figure 7. Elle montre que les espaces parcourus par la plaque, dans les intervalles de temps égaux correspondant à une double oscillation, croissent en progression arithmétique. Le mouvement de chute libre est donc uniformément accéléré.

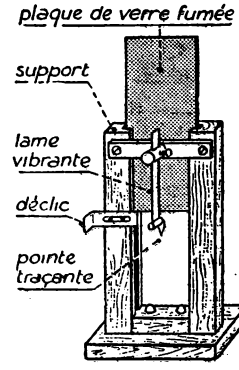


Fig. 6. — En déplaçant le déclencheur vers la gauche, la plaque de verre tombe. Le style de la lame vibrante trace une courbe telle que celle de la figure 7.

5. Valeur de l'accélération d'un corps en chute libre.

Des mesures précises, faites avec des appareils que nous ne pouvons décrire ici, montrent que,

1. Appareil de H. Roubault et R. Bourguignon, Etablissements Massiot, éditeurs.

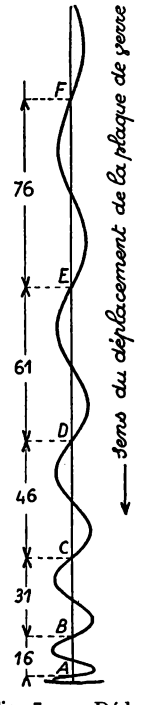


Fig. 7. — Réduction au tiers de la courbe obtenue avec l'appareil de la figure 6. Les nombres indiqués sont les nombres réels, mesurés en millimètres sur la plaque.

en un même lieu, l'accélération d'un corps en chute libre ne varie pas et qu'elle est la même pour tous les corps. Elle est égale dans la région parisienne à 9,81 m/s/s. On la représente habituellement par la lettre *g*.

$$g = 9{,}81 \ m/s/s \text{ à Paris.}$$

Le *vecteur accélération de la pesanteur* est donc *vertical*. Son sens est le même que celui de la vitesse du mouvement de chute libre, c'est-à-dire de haut en bas.

II. — FORMULES DU MOUVEMENT DE CHUTE DES CORPS

Pour les obtenir, il suffit de remplacer γ par g dans les formules générales du mouvement uniformément varié.

6. Premier cas : le corps est abandonné dans l'espace sans être lancé, donc sans vitesse initiale.

Prenons comme *origine des espaces* le point où le corps est abandonné à lui-même, et comme *origine des temps* l'instant où le corps se met en mouvement.

Soient v la vitesse à l'instant t, h la hauteur de chute à cet instant. Nous pouvons écrire :

$$v = gt \quad (1); \quad h = \frac{1}{2} gt^2 \quad (2); \quad v = \sqrt{2gh} \quad (3)$$

EXEMPLE NUMÉRIQUE. — *Une bille d'acier tombe en chute libre d'une hauteur* $H = 20$ *mètres. Calculer :* 1° *la durée de la chute ;* 2° *sa vitesse lorsqu'elle atteint le sol.*

Les données sont H et g et les inconnues : t et v.

1° *Durée de la chute :*

De $H = \frac{1}{2} gt^2$, nous tirons $t^2 = \frac{2H}{g}$, d'où en ne considérant que la racine positive

$$t = \sqrt{\frac{2H}{g}}.$$

Prenons le *mètre* comme unité de longueur, la *seconde* comme unité de temps.

Ici $H = 20, \qquad g = 9{,}81.$

D'où $$t = \sqrt{\frac{2 \times 20}{9{,}81}} = \mathbf{2{,}02 \ secondes.}$$

2° *Vitesse à l'arrivée au sol :*

C'est la vitesse de la bille lorsqu'elle a parcouru un espace H = 20 *m.*

Donc : $v = \sqrt{2gH} = \sqrt{2 \times 9{,}81 \times 20} \simeq$ ***19,8 m/s.***

REMARQUE. — Nous aurions pu tout aussi bien calculer la vitesse après 2,02 de chute à l'aide de la formule (1) :

$$v = gt = 9{,}81 \times 2{,}02 = 19{,}8 \text{ m/s.}$$

7. Deuxième cas : le corps est lancé verticalement de haut en bas, avec une vitesse initiale v_0.

Le mouvement est encore uniformément accéléré, car *l'accélération a le même sens que la vitesse initiale.*

Prenons comme *origine des temps* l'instant où la vitesse est v_0. Il lui correspond, sur la trajectoire, un point que nous prendrons comme *origine des espaces.*

Si l'on désigne par v la vitesse à l'instant t et par h la hauteur de chute correspondante, les formules du mouvement s'écrivent :

$$v = v_0 + gt \quad (4); \quad h = v_0 t + \frac{1}{2} gt^2 \quad (5); \quad v^2 = v_0^2 + 2gh \quad (6)$$

8. Troisième cas : le corps est lancé verticalement de bas en haut avec une vitesse initiale v_0.

Observons un tel mouvement en lançant une bille en l'air (fig. 8). Elle part de A avec une vitesse v_0, s'élève, ralentit, atteint un *point culminant* B et redescend. C'est que la *pesanteur* produit ici une *décélération* dont la valeur est encore égale à 9,81 *m/s/s.*

Le *mouvement d'ascension* est uniformément retardé et la décélération est de sens contraire à la vitesse initiale. La vitesse s'annule au point culminant B.

Le *mouvement de descente*, à partir de B, est celui d'un corps abandonné sans vitesse initiale dans l'espace.

Etudions séparément ces deux mouvements.

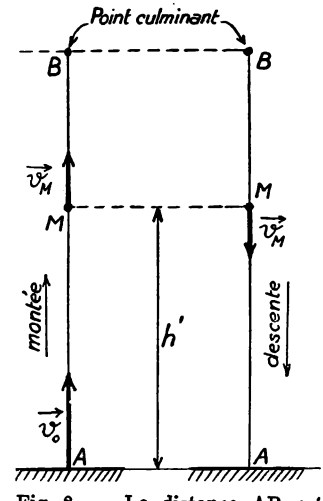


Fig. 8. — La distance AB est la hauteur H atteinte par le projectile.

A. ***Mouvement d'ascension.*** Mesurons les espaces à partir du point A et les temps à partir de l'instant du départ.

Soient : v la vitesse à l'instant t, h l'espace parcouru au même instant. Les formules du mouvement sont alors :

$v = v_o - gt$ (7); $h = v_o t - \frac{1}{2} gt^2$ (8); $v^2 - v_o^2 = 2gh$ (9)

La *durée d'ascension* est le temps t au bout duquel la vitesse s'annule, soit

$$t = \frac{v_o}{g}. \qquad (10)$$

La ***hauteur d'ascension*** H correspondante a pour valeur :

$$H = v_o \frac{v_o}{g} - \frac{1}{2} g \left(\frac{v_o}{g}\right)^2 = \frac{v_o^2}{2g}. \qquad (11)$$

EXEMPLE NUMÉRIQUE. — Soit : $v_o = 49$ *m/s* $g = 9{,}80$ *m/s/s (valeur approchée de g à Paris). Calculer la durée et la hauteur d'ascension.*

Durée de l'ascension : $t = \frac{v_o}{g} = \frac{49}{9{,}8} = 5$ *s*

Hauteur d'ascension : $H = \frac{v_o^2}{2g} = \frac{49^2}{2 \times 9{,}8} = 122{,}50$ *m*

B. ***Mouvement de descente.*** Prenons comme *instant initial* celui où la bille est à son point culminant et comme *origine des espaces* ce point culminant. Les formules du mouvement sont les mêmes qu'au premier cas (Paragraphe 6).

Calculons le temps t que met la bille pour revenir au point d'où on l'a lancée. L'espace parcouru étant égal à H, on a :

$$H = \frac{1}{2} gt^2.$$

Mais $H = \frac{v_o^2}{2g}$; donc $\frac{v_o^2}{2g} = \frac{1}{2} gt^2$

d'où $t^2 = \frac{v_o^2}{g^2}$ et $t = \frac{v_o}{g}$.

La durée de la descente est égale à la durée de l'ascension.

De même, calculons la *vitesse de la bille lorsqu'elle repasse à son point de départ.*

$$v = \sqrt{2gH} = \sqrt{2g \times \frac{v_o^2}{2g}} = v_o.$$

Cette vitesse est donc égale à la vitesse initiale.

REMARQUE. — Montrons qu'étant donné un point quelconque M de la trajectoire verticale, *la vitesse en ce point a la même valeur à la montée qu'à la descente.*

Sur la figure 8, h' est la distance du point M au sol.

A la montée, le vecteur vitesse a le sens de bas en haut.

$$v_M \text{ à la montée} = \sqrt{v_o^2 - 2gh'}.$$

A la descente, le vecteur vitesse à le sens de haut en bas.

v_M à la descente $= \sqrt{2g(H - h')} = \sqrt{2gH - 2gh'} = \sqrt{v_o^2 - 2gh'}$.

Résumé

1. Un corps ***abandonné en chute libre, sans vitesse initiale,*** prend un mouvement vertical uniformément accéléré dont l'accélération $g = 9{,}81 m/s/s$ à Paris.
Les formules du mouvement s'écrivent :

$$v = gt \quad ; \quad h = \frac{1}{2} gt^2 \quad ; \quad v = \sqrt{2gh}$$

(v : vitesse à l'instant t; h : espace parcouru au même instant).

2. Si le corps est ***lancé verticalement de haut en bas*** avec une vitesse initiale v_0, ces formules deviennent :

$$v = v_0 + gt \quad ; \quad h = v_0 t + \frac{1}{2} gt^2 \quad ; \quad v^2 = v_0^2 + 2gh.$$

3. Si le corps est ***lancé verticalement de bas en haut*** avec une vitesse initiale v_0, le mouvement comprend 2 phases :
1° ***Mouvement de montée :*** uniformément retardé, de décélération égale à g

$$v = v_0 - gt \quad : \quad h = v_0 t - \frac{1}{2} gt^2 \quad ; \quad v^2 = v_0^2 - 2gh.$$

La ***durée d'ascension*** : $t = \frac{v_0}{g}$; la ***hauteur d'ascension*** : $H = \frac{v_0^2}{2g}$.
2° ***Mouvement de descente :*** uniformément accéléré sans vitesse initiale.
Si l'on prend comme origine des temps l'instant où le corps atteint le point culminant, et comme origine des espaces ce même point, les formules du mouvement sont celles du 1er cas.
Le corps repasse au point de départ avec la vitesse v_0 au bout d'un temps égal à la durée d'ascension.

Exercices

1. On laisse tomber librement d'une hauteur $h = 6$ *m* la masse d'un mouton d'estampage.
1° Calculer la durée de la chute.
2° La vitesse à l'arrivée.

2. Une pierre est lâchée à l'orifice d'un puits. 4 *secondes* après on entend le choc de la pierre sur le fond. Peut-on déterminer la profondeur du puits?
(Vitesse du son dans l'air : 340 *m/s.*)

3. Pendant la dernière seconde de son mouvement une bille tombant sans vitesse initiale dans un puits a parcouru 49,05 *m.*
Calculer la durée de la chute et la profondeur du puits.

4. On lance une balle en l'air verticalement. Quelle vitesse faut-il lui imprimer pour qu'elle atteigne une hauteur de 30 *mètres?*
Au bout de combien de temps touchera-t-elle le sol?

5. Il s'est écoulé 4 *secondes* entre le départ et l'arrivée au sol d'une pierre lancée en l'air verticalement.
Peut-on déduire de cette mesure la vitesse initiale et la hauteur d'ascension?

6. Montrer que dans un mouvement uniformément retardé, les espaces parcourus pendant des intervalles consécutifs égaux décroissent en progression arithmétique.
Imaginer un dispositif chronophotographique, destiné à enregistrer le mouvement d'une bille lancée verticalement vers le haut, et appliquer la remarque précédente pour vérifier que ce mouvement est uniformément retardé.

LECTURE. — Galilée et la chute des corps.

L'auteur des lignes suivantes, le savant italien GALILÉE (1564-1642), est un des créateurs de la mécanique. Cet homme de génie inaugura la méthode de la science moderne : *la Nature est interrogée par l'expérience, les résultats obtenus sont interprétés par le raisonnement mathématique.*

« *Rien n'est plus important, dans la Nature, que le* mouvement *dont l'étude a occupé de nombreux et notables écrits des philosophes. Pourtant, malgré leur nombre et le mérite de certains d'entre eux, aucune conclusion précise et bien démontrée ne s'en dégage. On rencontre quelques énoncés simples, comme, par exemple, que la chute libre des corps pesants est un mouvement toujours accéléré, mais on n'a pas dit jusqu'à maintenant comment se fait cette accélération. Autant que je sache, personne n'a encore démontré que les segments parcourus successivement en des temps égaux sont entre eux comme les nombres impairs successifs. On a observé qu'un corps lancé décrit une certaine courbe, mais personne n'a enseigné que cette courbe est une parabole. Je vais démontrer qu'il en est ainsi et exposer bien d'autres résultats non moins curieux.*

Le chemin sera donc ouvert et les premiers pas seront faits pour la construction d'une science très vaste et fort importante dont il sera réservé à des esprits supérieurs au mien de pénétrer les profonds secrets ».

Extrait de « Discours et démonstrations mathématiques concernant deux nouvelles sciences relatives aux machines et aux mouvements des corps pesants ».

GÉNÉRALISATION DES FORMULES DU MOUVEMENT UNIFORMÉMENT ACCÉLÉRÉ OU RETARDÉ[1].

Les formules : $v_t = v_o + \gamma t = \pm\sqrt{v_o^2 + 2\gamma e_t}$

$$e_t = e_o + v_o t + \frac{1}{2}\gamma t_2$$

sont générales, c'est-à-dire qu'elles s'appliquent à tous les mouvements uniformément accélérés ou uniformément retardés, à condition de considérer les espaces, vitesses, accélérations, temps, comme des *quantités algébriques*, c'est-à-dire positives ou négatives suivant les cas.

On fait choix :

1° *d'un sens positif sur la trajectoire;*

2° *d'une origine des espaces sur cette trajectoire;*

3° *d'une origine des temps.*

Ces choix sont arbitraires, c'est-à-dire qu'on les fait à volonté; mais il est habile de les faire de façon à simplifier le plus possible les formules et les calculs.

DANS LES APPLICATIONS NUMÉRIQUES :

l'espace parcouru e_t par le mobile est un nombre positif si, pour aller de l'origine des espaces à la position du mobile, le déplacement se fait dans le sens positif choisi sur la trajectoire;

la vitesse v_t du mobile est un nombre positif, si le vecteur vitesse est dirigé dans le sens positif choisi sur la trajectoire;

l'accélération γ du mobile est un nombre positif si le vecteur accélération est aussi dirigé dans le sens positif choisi sur la trajectoire;

le temps t, est un nombre positif, si l'instant qu'il désigne est *postérieur à l'instant initial*, c'est-à-dire vient après cet instant. Habituellement on choisit toujours le début du mouvement comme instant initial et alors le temps t est toujours un nombre positif.

EXEMPLE. — *Étudier le mouvement d'un projectile lancé verticalement, de bas en haut, par une arme à feu, avec une vitesse initiale de* 490 *m/s.*

1° *Quelle est la durée et la hauteur d'ascension?*

2° *Quelle est la hauteur maximum atteinte par le projectile?*

3° *Quelle est la vitesse du projectile:*

a) *à* 5 000 *mètres de hauteur?*

b) *quand il repasse au point de départ?*

4° *Tracer les diagrammes des vitesses et le diagramme des espaces.*

On prendra g = 9,8 *pour l'accélération de la pesanteur.*

SOLUTION. — Précisons les conventions que nous utiliserons.

Nous adoptons comme unité de longueur le *mètre*, comme unité de temps la *seconde.*

La trajectoire est rectiligne, verticale. Nous choisissons comme *sens positif* sur cette trajectoire *le sens de bas en haut;* comme *origine des espaces, le point* où le projectile quitte la bouche du canon; comme *origine des temps, l'instant* où le projectile quitte cette bouche.

1. Cette généralisation peut être négligée dans une première étude.

Par suite de ces différents choix :

$e_o = 0$, puisqu'à l'origine des temps le projectile est à l'origine des espaces : la bouche de l'arme.

$v_o = + 490$, puisque la vitesse initiale est dirigée de *bas en haut*, donc suivant le sens positif choisi sur la trajectoire, et que l'unité de vitesse est le *m /s*.

$g = — 9{,}8$, puisque l'accélération due à la pesanteur est toujours dirigée verticalement de *haut en bas*, donc suivant le sens négatif choisi sur la trajectoire; et que l'unité d'accélération adoptée est le *m /s /s*.

Les formules générales deviennent donc :

$$v_t = 490 - 9{,}8\,t = \pm\sqrt{490^2 - 2 \times 9{,}8 \times e_t}$$

$$e_t = 490\,t - \frac{1}{2} \times 9{,}8 \times t^2.$$

Appliquons-les aux questions posées.

1° *Durée de l'ascension :* Le projectile monte aussi longtemps que sa vitesse est positive, évidemment. Il s'arrête de monter; donc, il atteint son point culminant, quand la vitesse devient nulle : alors $v = 0$. Si t' est le temps écoulé depuis l'origine des temps, c'est-à-dire depuis le départ du projectile :

$$0 = 490 - 9{,}8\,t'$$

$$t' = \frac{490}{9{,}8} = 50 \text{ secondes.}$$

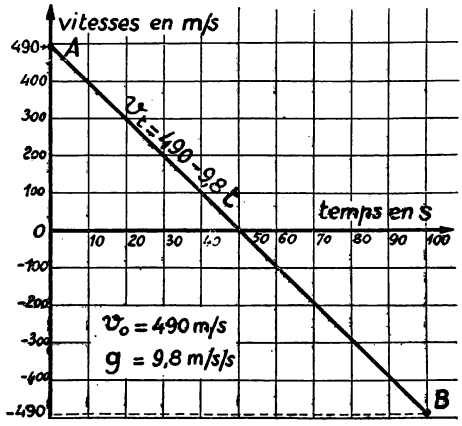


Fig. 1. — *Diagramme de la vitesse* d'un point mobile lancé verticalement en l'air.

2° *Hauteur du point culminant.* — Soit H cette hauteur. Elle est atteinte au temps $t' = 50$ secondes. H est donc égale à l'espace parcouru par le projectile au bout de 50 *secondes*.

Appliquons la formule des espaces à ce temps particulier :

$$H = 490 \times 50 - \frac{9{,}8 \times 50^2}{2} =$$

$$= 12\,250 \text{ m.}$$

On aurait pu raisonner aussi en écrivant que la vitesse s'annule quand le projectile est à la hauteur H. La formule :

$$v_t = \pm\sqrt{490^2 - 2 \times 9{,}8 \times e_t}$$

appliquée à ce cas devient (en remarquant qu'alors $e_t = H$) :

$$0 = \pm\sqrt{490^2 - 2 \times 9{,}8 \times H}$$

d'où

$$H = \frac{490^2}{2 \times 9{,}8} = 12\,250 \text{ m.}$$

3° a) *Vitesse du projectile à 5 000 mètres de hauteur.*

Appliquons la formule précédente au cas particulier où $e_t = + 5\,000$ *mètres*.

$$v = \pm\sqrt{490^2 - 2 \times 9{,}8 \times 5\,000}$$

$$= \pm 390 \text{ m/s.}$$

Ce résultat nous apprend qu'à 5 000 *mètres* de hauteur, la vitesse peut être positive ou négative. En effet, elle est positive si le projectile monte, elle est négative s'il descend.

Il nous apprend aussi que le projectile a des *vitesses égales en valeur absolue* quand il passe au même point de la trajectoire, soit en montant, soit en descendant.

b) *Vitesse du projectile lorsqu'il repasse à son point de départ.*

En particulier, quand le projectile repasse à son point de départ *en descendant*, sa vitesse est égale à sa vitesse initiale en valeur absolue, soit 490 *m/s*, mais elle est de sens contraire. Algébriquement, cette vitesse s'écrit — 490 *m/s*.

Il en résulte que, si l'on appelle t'' le temps au bout duquel la vitesse prend cette valeur négative, — 490 *m/s*, la formule

$$v_t = 490 - 9{,}8 \times t$$

devient :

$$-490 = 490 - 9{,}8\ t''$$

d'où $t'' = 100$ *secondes*.

La durée de la descente est donc

$t'' - t' = 100 - 50 = 50$ *secondes*.

Elle est égale à la durée de la montée.

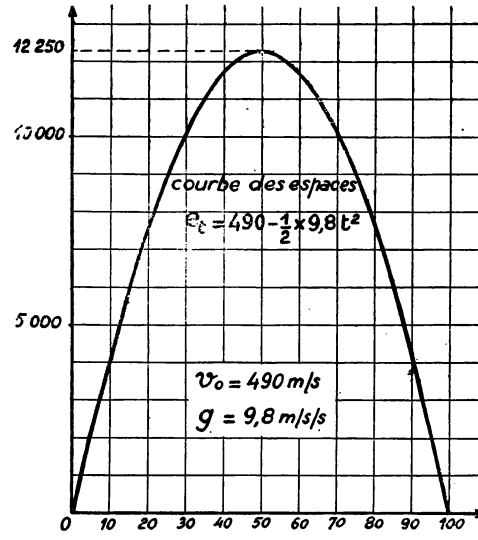


Fig. 2. — *Diagramme des espaces* d'un point mobile lancé verticalement en l'air.

Remarque. — Si nous remplaçons t par $t'' = 100$ *secondes* dans la formule

$$e_t = 490\ t - \frac{1}{2} \times 9{,}8 \times t^2,$$

nous trouvons :

$$e_t = 490 \times 100 - \frac{1}{2} \times 9{,}8 \times \times 100^2 = 0$$

Le mobile est en effet revenu à son point de départ.

4° *Représentation graphique des lois du mouvement.*

Nous nous bornerons à faire varier le temps t dans l'intervalle 0 — 100 *secondes*.

1° La vitesse $v_t = 490 - 9{,}8\ t$ est une fonction du 1er degré de la variable t. Ses variations sont représentées par une droite (fig. 1).

2° L'espace $e_t = 490\ t - \frac{1}{2} \times 9{,}8\ t^2$ est une fonction du 2e degré de la variable t.

La courbe qui représente ses variations est une parabole. Elle coupe l'axe des temps pour les valeurs de e_t égales à 0, c'est-à-dire aux instants $t = 0$ *s*, $t = 100$ *s*; elle passe par un maximum pour $t = 50$ *s* (fig. 2).

Exercices

1. Démontrer, comme l'affirme Galilée (voir Lecture, page 64), que dans un mouvement uniformément accéléré les espaces parcourus successivement en des temps égaux sont entre eux comme les nombres impairs successifs.

2. D'un point A, on lance une bille verticalement de bas en haut avec une vitesse initiale $v_0 = 60$ *m/s*. Du même point et 2 secondes après, on lance de la même manière une autre bille dont la vitesse initiale $v_0 = 50$ *m/s*

1° Ecrire l'équation des espaces de chaque mobile (*origine des temps :* l'instant du départ de la première bille).

2° A quel instant et en quel point de la trajectoire se produira la rencontre ?

3° Quelle sera la vitesse de chaque bille à cet instant ?

4° Résoudre graphiquement les deux questions précédentes.

(*Pour simplifier les calculs, on prendra* $g = 10$ *m/s/s.*)

Mouvement circulaire uniforme d'un point.

I. — LOIS DU MOUVEMENT

1. Définition du mouvement circulaire.

1° Observons une meule qui tourne : elle est animée d'un *mouvement de rotation.*

Comptons le nombre de tours qu'elle fait pendant chaque minute. Nous trouvons par exemple :

1re minute	50 tours.
2e minute	50 —
3e minute	50 —

La meule fait des nombres de tours égaux en des temps égaux : son *mouvement de rotation est uniforme.* Sa ***vitesse de rotation*** [1] est de 50 *tours par minute,* ce que l'on écrit :

$$N = 50 \text{ tr/mn}$$

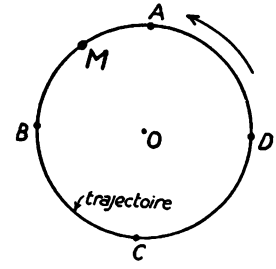


Fig. 1. — Dans un *mouvement circulaire uniforme* le point mobile M décrit des arcs de cercle égaux en des temps égaux.

2° Considérons un point quelconque M de la meule (fig. 1). Sa trajectoire est une circonférence qu'il décrit toujours dans le même sens : son *mouvement est circulaire.*

3° Le point M parcourt évidemment des arcs égaux $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CD}$, $\overset{\frown}{DA}$, en des temps égaux. Son mouvement est *uniforme :* il est *circulaire uniforme.*

DÉFINITION. — ***Un point est animé d'un mouvement circulaire uniforme lorsqu'il décrit sur une circonférence, et toujours dans le même sens, des arcs égaux en des temps égaux, quels que soient ces temps.***

1. On peut aussi exprimer la vitesse de rotation en tours par seconde, en tours par heure. Mais dans les machines usuelles on l'exprime toujours en tours par minute.

2. Vitesse linéaire ou circonférencielle.

Soit R = 0,40 *m* le rayon de la circonférence décrite par le point M. En 1 *minute*, ou 60 *secondes*, le mobile parcourt 50 fois une circonférence de 0,40 *m* de rayon, soit un espace :

$$e = 2\pi R \times N = 2 \times 3{,}14 \times 0{,}4 \times 50 = 125{,}6\ m$$

Par définition, *le quotient de l'espace parcouru, par le temps employé à le parcourir, est la* ***vitesse linéaire ou vitesse circonférencielle*** *du point M.*

Si nous prenons comme unité de longueur le *mètre* et comme unité de temps la *seconde*, la vitesse est :

$$v = \frac{e}{60} = \frac{125{,}6}{60} \simeq \boldsymbol{2{,}1\ m/s}$$

D'une manière générale, $\boldsymbol{N}$ étant le *nombre de tours par minute*, $\boldsymbol{R}$ le rayon et $\boldsymbol{D}$ le diamètre de la circonférence décrite, nous écrirons :

$$\boldsymbol{v = \frac{2\pi RN}{60} = \frac{\pi DN}{60} = \frac{\pi RN}{30}} \qquad (1)$$

Cette formule montre que la *vitesse linéaire est directement proportionnelle :*

1° *au rayon* R *de la circonférence décrite par le mobile;*

2° *à la vitesse de rotation* N.

3. Représentation de la vitesse linéaire par un vecteur.

Soient : O le centre de la circonférence décrite par le point mobile (fig. 2).

M la position de ce point à l'instant *t;*

M′ sa position à l'instant *t′* très voisin de *t;*

Pendant l'intervalle de temps *t′* — *t*, le mobile a parcouru l'arc MM′ à la vitesse *v* = 2,1 *m/s.*

Si (*t′* — *t*) est assez petit, l'arc MM′ est très court et la direction MM′ dans laquelle se déplace le mobile peut être confondue avec la direction de la tangente au point M à la circonférence.

Donc, *quand le mobile passe au point M, la direction de son déplacement et, par suite, la direction de sa vitesse linéaire est celle de la tangente à la circonférence en ce point.*

Conséquence. — Pour représenter la *vitesse linéaire* du point mobile, lorsqu'il passe au point M de sa trajectoire, il faut :

1° *mener la tangente à la trajectoire au point M;*

2° *porter sur cette tangente, à partir du point M, dans le sens du mouvement, un vecteur* $\overrightarrow{v_M}$ *de longueur proportionnelle à la valeur de la vitesse linéaire.*

REMARQUE. — Si l'on représente, à la même échelle, les vecteurs vitesses en différents points A, B, C de la trajectoire (fig. 3), ils ont tous *même longueur*, mais *des directions différentes*.

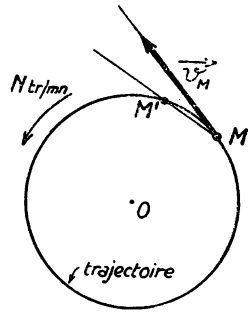


Fig. 2. — La **vitesse linéaire** du mobile est représentée au point M par le vecteur $\vec{v}_M$, tangent en M à la trajectoire et de longueur proportionnelle à sa valeur numérique.

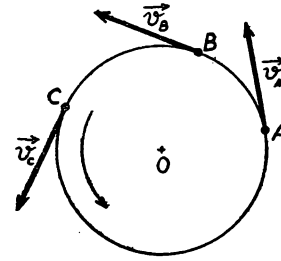


Fig. 3. — Les vecteurs vitesses du point mobile, en différents points de sa trajectoire, ont tous même grandeur, mais des directions différentes.

4. Loi des espaces.

Nous avons vu précédemment que $v = \frac{e_t}{t}$, d'où

$$e_t = vt \quad . \qquad (2)$$

Cette formule, identique à celle du mouvement rectiligne uniforme, exprime que *l'espace parcouru est proportionnel au temps employé à le parcourir.*

5. Définition de la vitesse angulaire.

Rappelons que le ***radian*** (symbole ***r***) est l'angle au centre qui intercepte sur une circonférence un arc égal au rayon : $\overset{\frown}{AB}$ = rayon OA = R (fig. 4).

La demi-circonférence ayant une longueur πR, l'angle plat AOE vaut :

$$\frac{\pi R}{R} = \pi \text{ } radians = 3{,}14 \text{ } radians$$

1 ANGLE PLAT = 2 DROITS = 180 DEGRÉS = 200 GRADES = 3,14 RADIANS.

DÉFINITION. — ***La vitesse angulaire ω d'un point M est l'angle, exprimé en radians, balayé en une seconde par le rayon OM*** (fig. 5).

Soit *N le nombre de tours par minute* du point mobile M. En un tour,

le rayon OM balaie 2π *radians*, et, en N *tours* : $2\pi N$ *radians*. Le nombre de radians balayés en une seconde ou ***vitesse angulaire*** est :

$$\omega = \frac{2\pi N}{60}, \text{ ou } \qquad \omega = \frac{\pi N}{30} \ r/s \qquad (3)$$

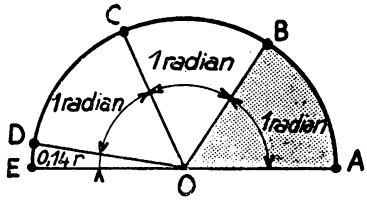


Fig. 4. — Le *radian* est l'angle au centre qui intercepte sur la circonférence un arc $\overset{\frown}{AB}$ égal au rayon OA. Dans une demi-circonférence, il y a π *radians*.

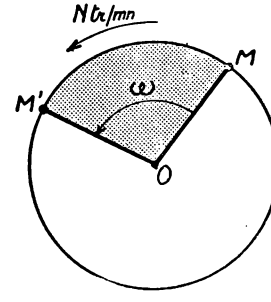


Fig. 5. — La **vitesse angulaire** ω du point M est le nombre de radians balayés en une *seconde* par le rayon OM.

REMARQUE. — La vitesse linéaire $v = \frac{\pi RN}{30}$, la vitesse angulaire $\omega = \frac{\pi N}{30}$. En comparant ces deux expressions, on voit que :

$$v = \omega R \qquad (4)$$

6. Problèmes d'application.

Dans les calculs, on utilise fréquemment la notion de vitesse angulaire.

PROBLÈME 1. — *Un point M tourne à raison de* 500 *tr /mn. Quelle est sa vitesse angulaire?*

Reprenons le raisonnement précédent : chaque fois que le point mobile M fait un tour, le rayon OM balaie un angle de 2π *radians*.

Puisqu'il fait 500 *tr /mn*, l'angle balayé en 60 *secondes* est :

$$2\pi \times 500 = 1\,000\ \pi = 3\,140 \text{ radians.}$$

L'angle balayé en 1 seconde est donc :

$$3\,140 : 60 = 52{,}3 \text{ radians.}$$

La vitesse angulaire cherchée : $\omega = 52{,}3\ r/s$

Problème 2. — *La vitesse angulaire d'un point M est de* 314 *r /s. Calculer sa vitesse de rotation en tours par minute.*

En 1 *seconde*, le rayon OM qui joint le point M au centre de sa trajectoire balaie 314 *radians*. Or, chaque fois que le point M fait 1 tour, le rayon OM balaie 2π radians. En 1 seconde, le point M fait donc :

$$314 : 2\pi = 314 : (2 \times 3{,}14) = 50 \text{ tours.}$$

En 1 minute, il en fait 50 × 60 = 3 000. Sa vitesse de rotation est donc :

$$N = 3\,000\ tr/mn$$

On peut aussi appliquer la formule : $\omega = \frac{\pi N}{30}$. Nous en tirons :

$$N = \frac{30\omega}{\pi} = \frac{30 \times 314}{3{,}14.} = 3\,000\ tr/mn$$

Problème 3. — *Le rayon de la circonférence décrite par un point M est de* 1,50 *m. Sa vitesse angulaire est de* 12 *r/s. Calculer sa vitesse linéaire.*

Utilisons la relation : $v = \omega R$

$$v = 12 \times 1{,}5 = 18\ m/s$$

II. — REPRÉSENTATION GRAPHIQUE DES LOIS DU MOUVEMENT

7. Diagramme de la vitesse.

Dans le mouvement circulaire uniforme d'un point, la vitesse de rotation, la vitesse linéaire et la vitesse angulaire sont des quantités constantes.

Le diagramme de chacune de ces grandeurs est donc caractérisé par une droite parallèle à l'axe de temps. *En pratique on n'utilise guère que le diagramme de la vitesse de rotation.* Sur la figure 6, la vitesse de rotation du mobile est de 350 *tr/mn.*

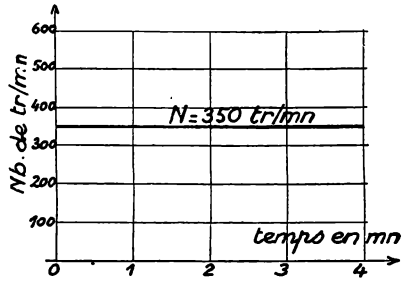


Fig. 6. — Voici le *diagramme de la vitesse de rotation* d'un mouvement circulaire uniforme. Ici N = 350 *tr/mn.*

8. Diagramme des espaces.

La loi des espaces étant $e_t = vt$, le diagramme des espaces est identique à celui du mouvement rectiligne uniforme. En pratique il ne présente guère d'intérêt.

Résumé

1. **Un point est animé d'un mouvement circulaire uniforme lorsqu'il décrit sur une circonférence, et toujours dans le même sens, des arcs égaux en des temps égaux quels que soient ces temps.**

2. **La *vitesse de rotation* est le nombre de tours N effectué en 1 minute.**

3. **La *vitesse linéaire ou circonférencielle* a même mesure que l'espace parcouru en 1 seconde:**

$$\boxed{v = \frac{\pi RN}{30}}$$

4. La *vitesse angulaire* a même mesure que l'angle balayé en 1 seconde par le rayon joignant le centre de la circonférence au point mobile. On l'exprime en *radians par seconde :*

$$\omega = \frac{\pi N}{30}$$

On a évidemment

$$v = \omega R$$

5. En un point de la trajectoire, la vitesse linéaire est représentée par un vecteur tangent en ce point à la trajectoire, orienté dans le sens du mouvement, et de longueur proportionnelle à la valeur numérique de cette vitesse.

Exercices

1. La roue d'une turbine à vapeur De Laval tourne à 10 000 *tr /mn.* Calculer :

1° La vitesse linéaire d'un point de la périphérie sachant que le diamètre extérieur est de 750 *mm.*

2° La vitesse angulaire de la roue.

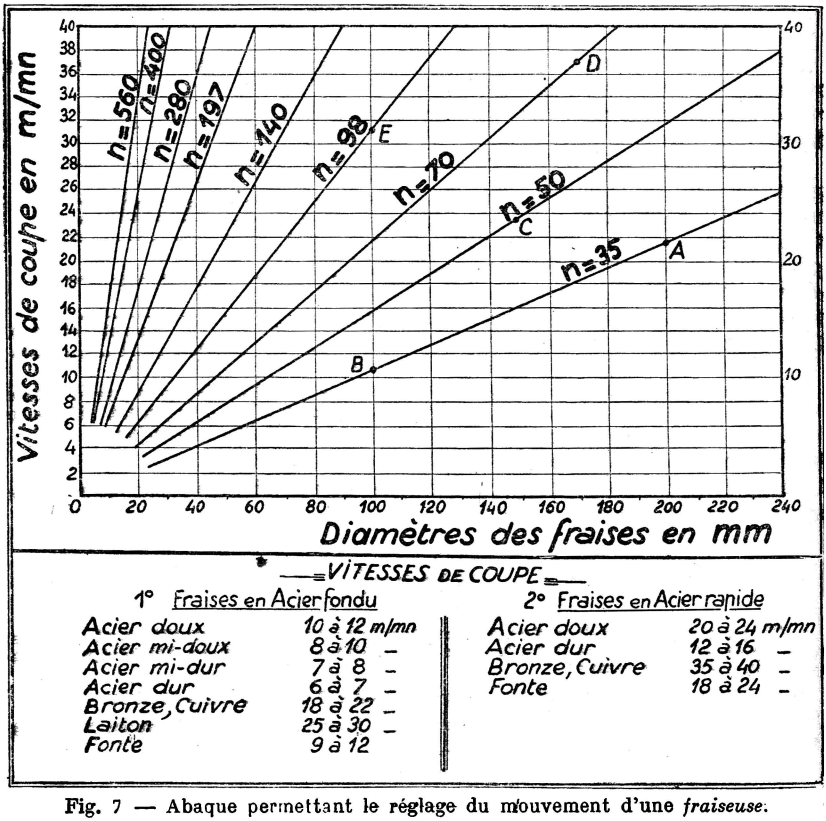
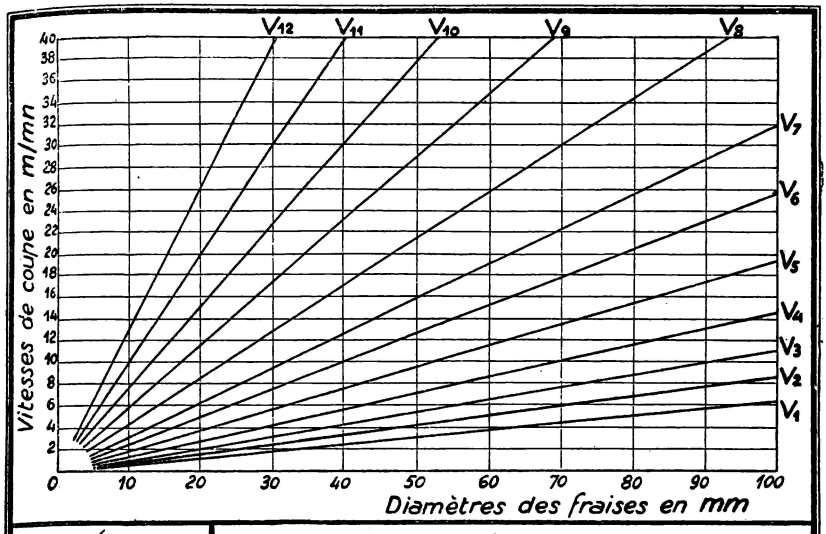


Fig. 7 — Abaque permettant le réglage du mouvement d'une *fraiseuse.*

2. Calculer le diamètre extérieur d'un volant tournant à raison de 60 *tr/mn* pour que la vitesse linéaire périphérique n'excède pas 12 *m/s*.



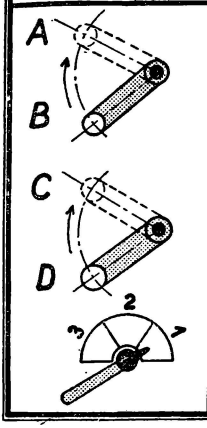


TABLEAU des VITESSES de COUPE

Nature du métal à travailler	Résistance en kg/mm²	Nature de l'outil : Acier fondu	Nature de l'outil : A. rapide	Vitesse de la fraiseuse en tr/mn	Positions des manettes
Acier doux	42 à 48	10 à 12 m/mn	17 à 24 m/mn	$V_1 = 20$	AC 1
				$V_2 = 27$	AC 2
Acier dur	65 à 74	5 à 7 —	9 à 13 —	$V_3 = 35$	AC 3
A. extra-dur	74 à 94	1 à 2 —	2 à 4 —	$V_4 = 46$	AD 1
A. mi-doux	48 à 55	6 à 10 —	14 à 27 —	$V_5 = 61$	AD 2
A. mi-dur	55 à 65	6 à 9 —	12 à 16 —	$V_6 = 82$	AD 3
				$V_7 = 102$	BC 1
Fonte		6 à 8 —	11 à 14 —	$V_8 = 137$	BC 2
				$V_9 = 183$	BC 3
Bronze		14 à 15 —	25 à 30 —	$V_{10} = 234$	BD 1
Laiton		15 à 17 —	30 à 38 —	$V_{11} = 316$	BD 2
				$V_{12} = 419$	BD 3

Fig. 8. — Abaque de fraiseuse.

3. Un tambour de treuil de diamètre 500 *mm* monte une charge d'un mouvement uniforme à la vitesse de 2*m/s*. Calculer sa vitesse de rotation. (Prendre $\pi = 3{,}14$).

4. En plein régime de marche le moteur d'une automobile tourne à la vitesse de 3 600 *tr/mn*. La liaison du vilebrequin aux roues motrices se fait par boîte de vitesses

et différentiel dont l'effet est de réduire le nombre de tours dans le rapport 1/6.
Le centre des roues se trouve à 0,35 *m* du sol.
Quelle est alors la vitesse de la voiture en *m/s*, en *km/h?*

5. On chariote sur un tour un axe en acier (diamètre : 70 *mm* ; longueur 350 *mm*) à l'aide d'un outil dont la vitesse de coupe est de 24 *m/mn*.
1° Quelle doit être la *vitesse de rotation* de la pièce ?
2° L'avance est de 1 *mm* par tour. Quelle est la durée d'une passe de l'outil ?

6. Une fraiseuse à l'atelier porte le tableau de la figure 7.
1° Vérifiez que la vitesse de coupe d'une fraise de 200 *mm* de diamètre, tournant à la vitesse de 35 *tr/mm* est bien égale à 21,5 *m/mn* (point A du diagramme).
Vérifier de même quelques autres points : B,C,D,E...
2° Vous avez une pièce d'acier à travailler. Par le billage vous avez reconnu que c'est de l'acier doux. Le diamètre de la fraise doit être de 70 *mm*. Quelle vitesse de rotation devez-vous donner à la broche porte-fraise :
a) Si la fraise est en acier fondu ?
b) Si la fraise est en acier rapide ?

7. Une fraiseuse porte le tableau de la figure 8.
1° Combien de vitesses de rotation différentes peut-on donner à la fraise ? Comment régleriez-vous les manettes pour obtenir la vitesse de 102 *tr/mn* ?
2° Quelle serait la vitesse de coupe en *m/mn* pour cette vitesse de rotation (102 *tr/mn*) si la fraise montée sur la broche a un diamètre de 60 *mm*.
3° Vous avez à fraiser une pièce en acier dur avec une fraise de 20 *mm* de diamètre. Expliquer comment vous procéderez pour régler convenablement la vitesse de rotation de la fraiseuse.

8. *Problème de la montre.* — Résoudre graphiquement le problème suivant : Quelles sont les heures de rencontres successives des aiguilles d'une montre ?
[En abscisses les heures de 0 à 12 h (*échelle : 1 cm pour 1 heure*) ; en ordonnées les angles de rotation (*échelle : 1,5 cm pour 1 droit*)].

9. Sur une circonférence de centre O et de rayon on choisit une origine des espaces A. Un mobile part du point M_0 tel que : $\widehat{AOM_0} = \theta_0$ radians. Sa vitesse angulaire est ω.
Démontrer que l'angle θ, *exprimé en radians*, parcouru par le mobile à l'instant t, est : $\theta = \theta_0 + \omega t$.

Mouvement rectiligne sinusoïdal.

1. Description du mécanisme : manivelle à coulisse[1].

Les figures 1 et 2 représentent la vue d'ensemble et le schéma d'un mécanisme qui se compose :

1° d'une manivelle d'axe O portant un maneton M;

2° d'une coulisse C munie de 2 tiges A et B guidées par des glissières,

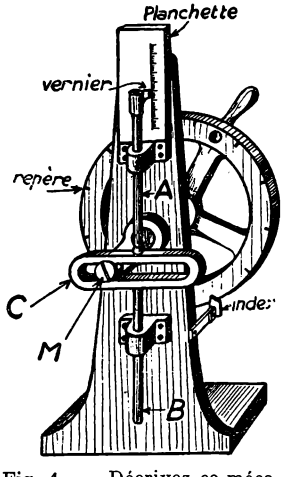


Fig. 1. — Décrivez ce mécanisme et dites comment la tige AB se meut quand on tourne la manivelle.

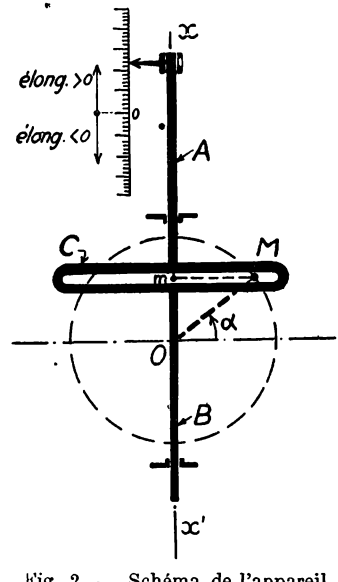


Fig. 2. — Schéma de l'appareil de la figure 1.

de même axe $x'x$. Le maneton s'engage dans la rainure de la coulisse.

Lorsque la manivelle tourne d'un mouvement uniforme, la coulisse prend un mouvement rectiligne alternatif de direction $x'x$ (fig. 2).

1. Cet appareil figure dans la collection des appareils de Cinématique construits par les Ecoles Nationales d'Arts et Métiers.

Nous constatons qu'à toute position M du maneton (fig. 2), correspond une position du point *m* de la coulisse obtenue en abaissant de M la perpendiculaire sur *x'x*. La longueur variable *Om* s'appelle ***élongation*** du point *m*.

Nous allons étudier le mouvement de ce point en remarquant qu'à *tout déplacement du point m* correspond un déplacement égal du *curseur à vernier* fixé sur la tige A.

2. Construisons le diagramme des élongations en fonction de l'angle α de rotation de la manivelle.

Le *volant* placé à l'arrière du bâti porte 12 *repères* qui divisent la circonférence en parties égales (fig. 1). Lorsque la manivelle est horizontale, l'*index* est en face d'une division du volant et le curseur de la

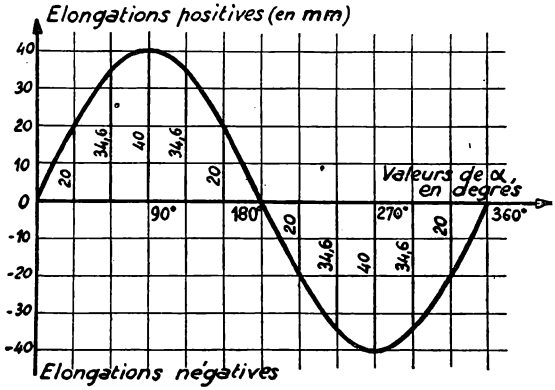


Fig. 3. — *Diagramme des élongations* en fonction de l'angle de rotation de la manivelle.

tige A est au zéro. Ce curseur glisse devant une échelle verticale graduée en millimètres. *Les divisions au-dessus de zéro seront comptées comme positives, celles au-dessous comme négatives.*

Mesurons les élongations pour différentes valeurs de l'angle de rotation. Nous obtenons le tableau suivant pour un tour du volant. (Le rayon de manivelle R = 40 *mm*).

ANGLE DE ROTATION α	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°	360°
Elongations (en *mm*)	0	20	34,6	40	34,6	20	0	—20	—34,6	—40	—34,6	—20	0

Sur du papier millimétré, traçons deux axes de coordonnées rectangulaires (fig. 3).

En abscisses, portons les valeurs de l'angle α [*Echelle : 5 mm pour 30°*] et en ordonnées, *avec leur signe*, les élongations [*Echelle : 1 mm pour 2 mm*].

La courbe qui joint d'une manière continue les points obtenus traduit les variations de l'élongation du point *m* en fonction de l'angle α de rotation de la manivelle.

3. Ce diagramme est une sinusoïde.

Sa forme rappelle en effet cette courbe. Nous allons *démontrer* que c'est bien une *sinusoïde*.

Soit *m* la projection orthogonale du point M sur l'axe *x'x* (fig. 4).

Dans le triangle rectangle OM*m*, l'angle $\widehat{OMm} = \alpha$, et :

$$Om = OM \sin \alpha = R \sin \alpha.$$

R étant constant, *l'élongation Om est proportionnelle au sinus de l'angle α; la courbe qui représente ses variations est donc une sinusoïde.*

4. Lorsque la manivelle tourne uniformément, le mouvement du point *m* est rectiligne sinusoïdal.

Soit ω la vitesse angulaire constante, exprimée en radians par seconde, du rayon de manivelle (fig. 4).

Prenons comme *origine des temps* l'instant où le point mobile est en M_0, *origine des espaces*.

Au bout de *t* secondes, l'angle α exprimé en radians, balayé par OM depuis le point M_0 a pour valeur :

$$\alpha = \omega t \text{ radians}.$$

L'élongation $e_t = Om = R \sin \alpha$ s'exprime donc *en fonction du temps* par la formule :

$$e_t = R \sin \omega t \qquad (1)$$

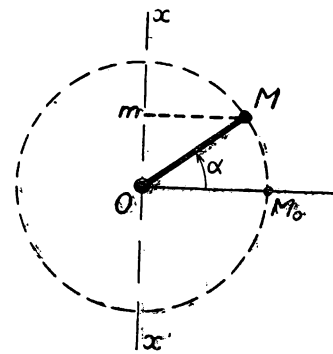


Fig. 4. — *Om* est l'*élongation* du point mobile *m*.
$Om = OM \sin \alpha$.

Le mouvement du point *m* est dit *rectiligne sinusoïdal*.

Avec les données de l'expérience : $e_t = 40 \sin \omega t$. L'élongation passe par un *maximum* R = 40 *mm* pour $\omega t = 90°$ ($\sin 90° = 1$) [1]. Elle

1. L'élongation reprend sa valeur maximum R chaque fois que la manivelle ayant d'abord tourné de 90° tourne encore de *n* fois 360°; c'est-à-dire chaque fois que $\omega t = 90° + n \times 360°$.

passe par un *minimum* R = — 40 *mm* pour $\omega t = 270°$ (sin 270° = — 1).

La valeur maximum de l'élongation, 40 *millimètres*, est ***l'amplitude*** du mouvement.

CONCLUSION. — ***Lorsqu'un point M décrit une circonférence de rayon R d'un mouvement uniforme, sa projection M sur un diamètre a un mouvement rectiligne sinusoïdal d'amplitude R.***

REMARQUE. — La formule (1) donne l'élongation à l'instant *t* et non, s'il a déjà fait plusieurs allers et retours, la longueur totale du trajet parcouru par le point *m* depuis l'instant initial. On convient cependant de l'appeler encore *formule des espaces*.

APPLICATION NUMÉRIQUE. — *Un point M décrit un cercle de 25 mm de rayon et tourne à la vitesse constante N = 30 tr/mn. Calculer l'élongation du point* m *au bout de 0,4 secondes.*

La vitesse angulaire est $\omega = \frac{\pi N}{30} = \frac{\pi \times 30}{30} = \pi$ *radians par seconde.*

Pour calculer le sinus de l'angle ωt, nous devons exprimer ω en degrés par seconde. Ici $\omega = \pi\ r/s = 180°$ par seconde.

Par suite, pour $t = 0{,}4\ s$:

$\omega t = 180 \times 0{,}4 = 72°$.

$\sin \omega t = \sin 72° = 0{,}951$

soit

$e_t = 25 \times 0{,}951 = \mathbf{23{,}8\ mm}$

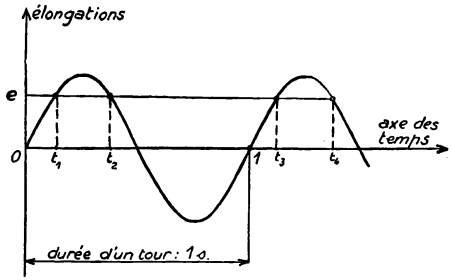


Fig. 5. — **Diagramme des espaces** du mouvement rectiligne sinusoïdal : $e_t = 40 \sin \omega t$.
Echelle des espaces : 30 *mm* pour 1 *s*
Echelle des espaces : 1 *mm* pour 4 *mm*

5. Diagramme des élongations en fonction du temps.

Pour une valeur donnée de ω, à chaque instant *t* correspond une valeur bien définie de sin ωt et par suite de l'élongation. On peut donc dresser le *diagramme des élongations en fonction du temps*. La figure 5 représente un tel diagramme dans le cas particulier où :

$\omega = 6{,}28\ r/s$ (ce qui correspond à une vitesse de rotation de 1 *tour par seconde*).

R = 40 *mm*

Les échelles employées sont indiquées sur le diagramme.

REMARQUE. — Nous constatons, sur le diagramme, qu'*à une élongation donnée* e *correspondent plusieurs valeurs du temps.*

6. Diagramme et loi des vitesses.

Soit V la vitesse linéaire constante du mobile M sur une circonférence

A tout instant elle est représentée par un vecteur $\overrightarrow{V}$ tangent à la trajectoire (fig. 6).

De même, la vitesse v du mobile m (projection de M sur un diamètre) est représentée par un vecteur $\overrightarrow{v}$ porté par $x'x$.

Nous admettrons ici, sans démonstration[1], que ***la projection orthogonale sur $x'x$, du vecteur-vitesse $\overrightarrow{V}$ du mobile M représente, en grandeur et sens, le vecteur-vitesse $\overrightarrow{v}$ du mobile m.***

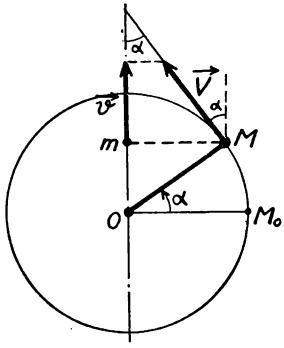


Fig. 6. — La projection $\overrightarrow{v}$ du vecteur $\overrightarrow{V}$ est le vecteur-vitesse du point m.

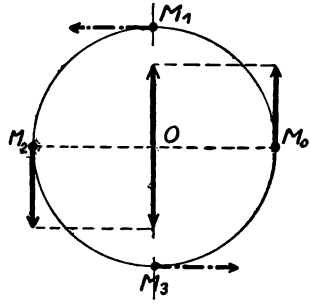


Fig. 7. — Reconnaissez la vitesse du point mobile m pour les positions M_0, M_1, M_2, M_3, du point mobile M.

Il en résulte, comme le montre la figure 7, que la vitesse v du mobile m est dirigée tantôt de O vers x, tantôt de O vers x'. Elle est égale à V lorsque M est en M_0 ou en M_2; elle est nulle lorsqu'il est en M_1 ou M_3.

Reprenons l'exemple précédent où : $\omega = 6{,}28\ r/s$; $R = 40\ mm$. La vitesse V du mobile M a pour valeur numérique :

$$V = \omega R = 6{,}28 \times 40 \simeq 251\ mm/s$$

En différents points de la trajectoire de M, représentons le vecteur vitesse à une certaine échelle : 1 *mm* pour 20 *mm/s*, par exemple, et projetons-le sur $x'x$: nous obtenons ainsi le vecteur-vitesse du mobile m.

Sur deux axes de coordonnées, portons en abscisses les temps, en ordonnées les vitesses, *avec le signe qu'elles ont sur l'axe $x'x$* (fig. 8). La courbe joignant d'une manière continue les points figuratifs obtenus représente la vitesse de m en fonction du temps.

C'est encore une sinusoïde qui, par rapport à celle de la figure 5, est

1. Cette démonstration est donnée dans la 11e Leçon.

décalée *vers la gauche* d'une quantité correspondant au quart de la durée d'un tour.

Etablissons en effet la loi des vitesses du point mobile *m*.

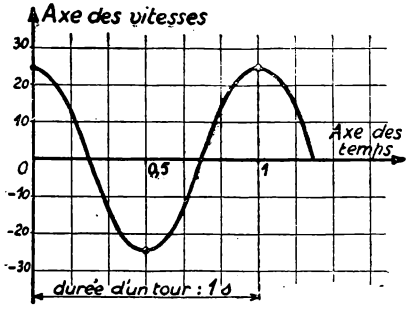


Fig. 8. — **Diagramme des vitesses** du mouvement rectiligne sinusoïdal (En ordonnées, les nombres indiquent, ici, des *cm/s*).

Sur la figure 6, les directions des vecteurs $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{V}$ font entre eux l'angle α. Par suite, le vecteur $\overrightarrow{v}$, projection orthogonale du vecteur $\overrightarrow{V}$ sur $x'x$, a pour longueur :

$$v = V \cos \alpha.$$

Or, $V = \omega R$

et $\alpha = \omega t$.

La vitesse v_t à l'instant t a donc pour valeur numérique :

$$v_t = \omega R \cos \omega t \qquad (2)$$

Cette formule traduit la loi des vitesses. Elle exprime que *la vitesse est directement proportionnelle au cosinus de l'angle* ωt.

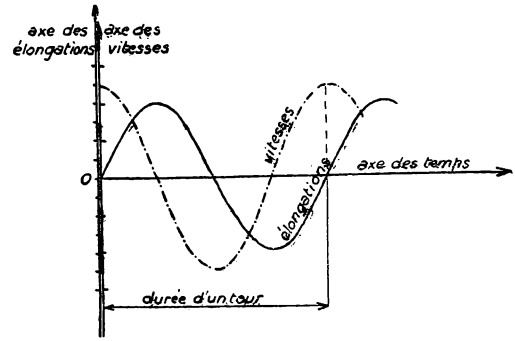


Fig. 9. — Dans tout mouvement sinusoïdal, la courbe de vitesses est décalée sur celle des élongations de 1/4 de *période*.

APPLICATION NUMÉRIQUE. — *Dans le cas où* $R = 25$ *mm et la vitesse de rotation du mobile M est* $N = 30$ *tr/mn, calculer la vitesse du mobile* m *au bout de* 0,4 *s.*

Prenons comme unité de vitesse le *millimètre par seconde*. Calculons séparément ωR et $\cos \omega t$.

ωR représente la vitesse linéaire du point M (ω en *r/s* et R en *mm*).

$$\omega R = \frac{\pi N}{30} \times R = \frac{3{,}14 \times 30}{30} \times 25 = 78{,}5 \text{ mm/s}$$

D'autre part, nous avons déjà calculé ωt au paragraphe 4 : $\omega t = 72°$ d'où :

$$\cos \omega t = \cos 72° = 0{,}309$$

En définitive, la vitesse v cherchée :

$$v = \omega R \cos \omega t = 78{,}5 \times 0{,}309 = \mathbf{24{,}2\ mm/s}$$

REMARQUE. — Si l'on superpose les axes de coordonnées de la courbe des élongations et de celle des vitesses, on obtient la disposition de la figure 10, lorsque les échelles des temps sont identiques. On dit que la courbe des vitesses est *décalée* par rapport à celle des élongations.

7. Mouvement périodique. Période. Fréquence.

Un mouvement est *périodique* (et d'une manière générale un phénomène est périodique), lorsqu'il se reproduit identique à lui-même, à des intervalles de temps égaux.

C'est le cas pour le point m. Son mouvement est périodique, car si nous considérons l'élongation et la vitesse de ce point, à un instant t quelconque, cette élongation e et cette vitesse v reprennent les mêmes valeurs, après un tour du rayon OM, à partir de cet instant t.

La période T est l'intervalle de temps qui sépare deux phases identiques consécutives du mouvement. Elle est ici égale à la durée d'un tour du rayon OM.

Soit ω la vitesse angulaire en r/s. En un tour, le point M décrit 2π *radians;* la durée d'un tour, c'est-à-dire la période T du mouvement sinusoïdal est donc égale à :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \text{ secondes.}$$

On appelle *fréquence* f d'un phénomène périodique le nombre de périodes par seconde. T étant la durée, en secondes, d'une période, la fréquence est :

$$f = \frac{1}{T}$$

Résumé

1. Lorsqu'un point **M** mobile décrit une circonférence d'un mouvement uniforme, sa projection m sur un diamètre $x'x$ est animée d'un ***mouvement rectiligne sinusoïdal.***

2. L'élongation du point m est sa distance au centre de la circonférence. Sa valeur est donnée à l'instant t par la formule :

$$e_t = R \sin \omega t$$

R : rayon de la circonférence; ω : vitesse angulaire du mouvement circulaire uniforme.

3. Le vecteur-vitesse du point m est la projection sur sa trajectoire $x'x$ du vecteur vitesse du point M. La valeur de la vitesse v à l'instant t est :

$$v_t = \omega R \cos \omega t$$

4. La courbe des espaces et celle des vitesses sont deux sinusoïdes décalées, l'une par rapport à l'autre, d'un quart de ***période.***

5. Le mouvement d'un point est dit ***périodique*** lorsqu'il se reproduit, identique à lui-même (même élongation du point, même vitesse) à des intervalles de temps égaux.

Le mouvement sinusoïdal est un mouvement périodique. La période T est l'intervalle de temps qui correspond à un tour de manivelle. Si ω est la vitesse angulaire constante:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Exercices

1. Un point mobile tourne uniformément sur une circonférence de rayon R = 60 *mm*. La vitesse de rotation N = 750 *tr/mn*. A l'instant initial il est en M_0 (fig. 10).

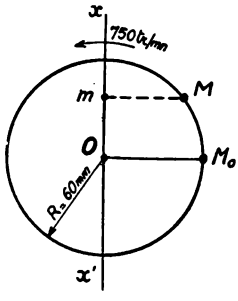


Fig. 10.

Calculer l'élongation et la vitesse en *m/s* du point *m*, projection de M sur *x x*, au bout de 0,01 *s*. Quelle est la période du mouvement?

2. Démontrer, en partant des lois du mouvement rectiligne sinusoïdal, que la vitesse s'exprime en fonction de l'élongation par la relation :

$$v = \pm \omega \sqrt{R^2 - e^2} \qquad (\omega \text{ en } r/s).$$

Interpréter le double signe.

3. On considère un point M mobile sur une circonférence. L'origine des espaces est en A et à l'origine des temps le mobile se trouve en un point M_0 tel que $\widehat{AOM_0} = \varphi$.

Établir les lois du mouvement du point *m*, projection du point M sur le diamètre OA.

4. Quelles modifications devrait-on apporter à l'appareil de la figure 1 pour qu'on puisse tracer *directement* sur la planchette, le diagramme des élongations en fonction de l'angle de rotation ?

Mouvement quelconque d'un point.

I. — LOIS DU MOUVEMENT

1. Loi des espaces.

Considérons un point M mobile sur une trajectoire quelconque (fig. 1). Soient : O l'*origine des espaces;* A le point de la trajectoire correspondant à l'*origine des temps* (OA est l'*espace initial*).

Choisissons en outre un *sens positif* de parcours sur la trajectoire.

A tout instant t, la position du point M est bien déterminée si l'on connaît *le nombre positif ou négatif, qui mesure* ***la distance qui le sépare de l'origine des espaces.***

Cette distance est, par définition, l'espace parcouru au temps t. Elle est donnée par la *loi des espaces* à laquelle le mobile obéit.

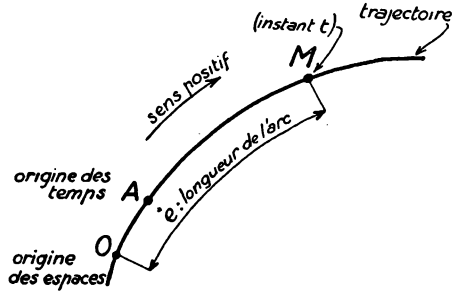


Fig. 1. — A tout instant, la position du point mobile M est définie si l'on connaît OM = e_t.

Rappelons la loi des espaces de quelques mouvements simples, étudiés dans les leçons précédentes.

1° ***Mouvement uniforme :*** $e_t = e_0 + vt$ (e_0 : constante; v : constante; t : variable).

L'espace est une fonction de t seulement.

2° ***Mouvement uniformément varié :*** $e_t = v_0 t \pm \frac{1}{2} \gamma t^2$ (v_0 : constante; γ : constante; t : variable).

L'espace est encore fonction de la seule variable t.

3° ***Mouvement rectiligne sinusoïdal :*** $e_t = R \sin \omega t$ (R et ω : constantes; t : variable).

L'élongation est une fonction de t seulement.

D'une manière générale, ***l'espace parcouru par le point mobile est fonction d'une seule variable : le temps.***

$$e = f(t) \qquad .1)$$

Cette formule doit faire correspondre, à une valeur quelconque t du temps, *une seule position* du point, car celui-ci ne peut être en deux points de l'espace au même instant. Par contre, à une même valeur e de l'espace, peut correspondre une ou plusieurs valeurs de t. *Exemple:* mouvement rectiligne sinusoïdal.

2. Loi des vitesses.

La vitesse du point mobile est également une fonction du temps. Rappelons des lois connues :

$$\begin{cases} v = \textit{constante} & \text{(Mouvement uniforme).} \\ v_t = v_0 \pm \gamma t & \text{(Mouvement uniformément accéléré ou retardé).} \\ v_t = \omega R \cos \omega t & \text{(Mouvement rectiligne sinusoïdal).} \end{cases}$$

Dans le cas général, nous écrirons :

$$v = \varphi(t) \qquad (2)$$

formule qui exprime que ***la vitesse est une fonction d'une seule variable : le temps.***

3. La vitesse instantanée est la dérivée de l'espace par rapport au temps.

1° Vérifions-le sur des exemples :

NATURE DU MOUVEMENT	LOI DES ESPACES	LOI DES VITESSES	DÉRIVÉE DE L'ESPACE PAR rapport au temps
Mouvt rect. uniforme.	$e_t = vt$	v = constante	$\frac{de}{dt} = v$
Mouvt rect. uniformément :			
accéléré sans v_0 ...	$e_t = \frac{1}{2}\gamma t^2$	$v_t = \gamma t$	$\frac{de}{dt} = \gamma t$
accéléré avec v_0...	$e_t = v_0 t + \frac{1}{2}\gamma t^2$	$v_t = v_0 + \gamma t$	$\frac{de}{dt} = v_0 + \gamma t$
retardé	$e_t = v_0 t - \frac{1}{2}\gamma t^2$	$v_t = v_0 - \gamma t$	$\frac{de}{dt} = v_0 - \gamma t$
Mouvt rect. sinusoïdal.	$e_t = \mathrm{R} \sin \omega t$	$v_t = \omega \mathrm{R} \cos \omega t$	$\frac{de}{dt} = \omega \mathrm{R} \cos \omega t$

2° Démonstration :

Soient : e l'espace parcouru à l'instant t

e' — — t'.

La vitesse moyenne dans l'intervalle de temps $t' - t$ est

$$v_{moy} = \frac{e' - e}{t' - t}$$

ou, si l'on pose $e' - e = \Delta e$, $t' - t = \Delta t$

$$v_{moy} = \frac{\Delta e}{\Delta t}$$

Lorsque Δt tend vers 0, le rapport $\frac{\Delta e}{\Delta t}$ tend vers une limite $\frac{de}{dt}$, *dérivée de l'espace par rapport au temps.* Or cette limite est, par définition, la vitesse du mobile à l'instant t (4e leçon, paragraphe 5).

4. Représentation de la vitesse instantanée par un vecteur.

Soient M et M' les positions du mobile aux instants t et t' que nous supposerons *très voisins* (fig. 2).

L'arc très court $\overset{\frown}{MM'}$ diffère peu de la corde MM' et la *vitesse moyenne* entre les instants t et t' peut être représentée par un certain *vecteur* $\overrightarrow{MC}$ *porté par la sécante MM'.*

1° Lorsque t' tend vers t, la différence $t' - t$ tend vers 0 et le point M' tend vers M. La droite MM' a donc une position limite : celle de la tangente en M à la trajectoire.

2° La vitesse moyenne tend vers une limite v qui est la vitesse à l'instant t du point mobile.

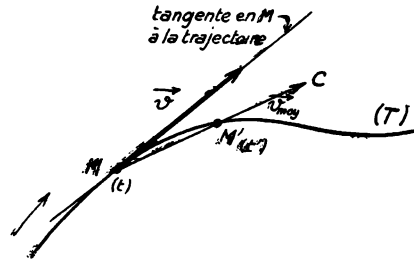


Fig. 2. — Le vecteur-vitesse à l'instant t est tangent à la trajectoire au point M correspondant.

CONCLUSION. — *La vitesse est représentée au point M par un vecteur tangent en M à la trajectoire, orienté dans le sens du mouvement, et de longueur proportionnelle à sa valeur numérique.*

II. — REPRÉSENTATION GRAPHIQUE DES LOIS DU MOUVEMENT

5. Diagramme des vitesses et diagramme des espaces.

Etant donnés deux axes de coordonnées rectangulaires, si nous portons en abscisses les valeurs croissantes du temps (l'instant 0 est placé à l'origine des coordonnées), et en ordonnées les valeurs de l'espace parcouru ou de la vitesse à chaque instant, nous pourrons construire les courbes qui représentent les variations des fonctions :

$$v = \varphi(t) \qquad \text{et} \qquad e = f(t).$$

Les diagrammes obtenus permettent de résoudre graphiquement les problèmes suivants (fig. 3 et 4) :

1° *Trouver l'espace parcouru à un instant donné* t (fig. 3, flèche 1).
Trouver à quels instants l'espace parcouru a une valeur donnée e (fig. 3, flèche 2).

2° *Trouver la vitesse à un instant donné* t (fig. 4, flèche 1).
Trouver à quels instants la vitesse a une valeur donnée v (fig. 4, flèche 2).

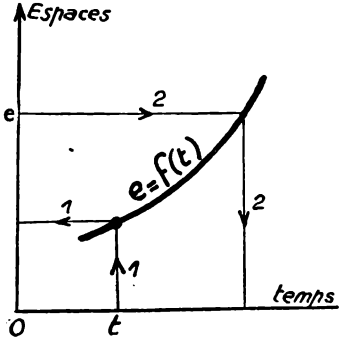


Fig. 3. — **Diagramme des espaces** d'un mouvement quelconque.

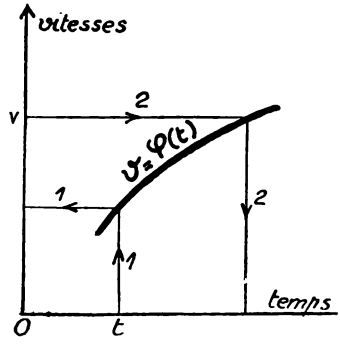


Fig. 4. — **Diagramme de la vitesse** d'un mouvement quelconque.

REMARQUE. — Il importe de ne pas confondre la courbe ou *diagramme des espaces* avec la *trajectoire* suivie par le mobile.

6. La vitesse à l'instant t est proportionnelle à la pente de la tangente à la courbe des espaces menée au point figuratif correspondant.

Considérons le *diagramme des espaces* de la figure 5 sur lequel les échelles sont indiquées.

Soient : e l'espace parcouru à l'instant t (point A)
e' — — t' (point B).

La vitesse moyenne dans l'intervalle $(t' - t)$ est : $v_{moy} = \dfrac{e' - e}{t' - t}$.

La différence $(e' - e)$ est représentée par le segment BD :

$$BD = l'(e' - e) \qquad \text{d'où} \quad e' - e = \frac{BD}{l'}.$$

La différence $(t' - t)$ est représentée par le segment ab :

$$ab = AD = l(t' - t) \qquad \text{d'où} \quad t' - t = \frac{AD}{l}.$$

Nous pouvons écrire : $v_{moy} = \frac{BD}{l'} : \frac{AD}{l} = \frac{l}{l'} \times \frac{BD}{AD} = \frac{l}{l'} \times tg\alpha'$

(tg α' *est la pente de la droite AB sur l'axe des temps*).

Lorsque l' tend vers t, la vitesse moyenne tend vers la vitesse v à l'instant t; la droite AB tend vers la tangente en A à la courbe des espaces et fait alors un angle α avec l'axe des temps. Donc :

$$v = \frac{l}{l'} tg\ \alpha.$$

l et l' étant constants, la vitesse v est bien proportionnelle à tg α.

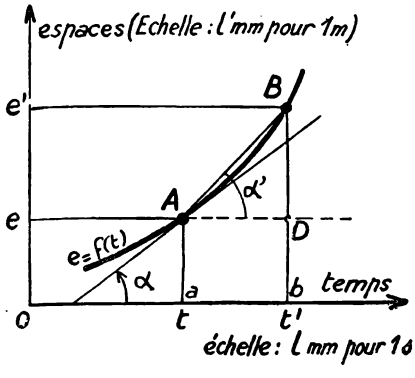


Fig. 5 — La vitesse v à l'instant t a pour valeur : $v = \frac{l}{l'} tg\ \alpha$.

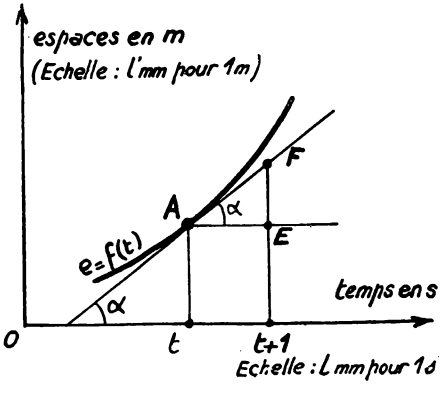


Fig. 6. — Le segment EF mesure, *à l'échelle des espaces*, la vitesse à l'instant t.

7. Mesure pratique de la vitesse sur le diagramme des espaces.

Supposons qu'on veuille mesurer la vitesse à l'instant t sur le diagramme des espaces de la figure 6.

Au point A menons la tangente à la courbe des espaces, puis la parallèle à l'axe des temps. Au point correspondant à l'instant $(t + 1)$ élevons la perpendiculaire à cet axe. Elle rencontre les droites précédentes en E et F. Le segment EF, *mesuré à l'échelle des espaces*, est égal à la valeur numérique de la vitesse à l'instant t.

En effet, d'après ce qui précède : $v = \frac{l}{l'}$ tg α. Or, tg $\alpha = \frac{EF}{AE}$ (tr. rect. AEF).

Le segment AE représente l'unité de temps, ici *la seconde*. Il a donc pour longueur l *mm*.

Donc : $$v = \frac{l}{l'} \times \frac{EF}{l} = \frac{EF}{l'}.$$

Ici EF mesure 8 *mm*, l'échelle $l' = 5$ *mm* pour 1 *m*. Le segment EF est mesuré à l'échelle des espaces par le quotient $\frac{EF}{l'} = \frac{8}{5} = 1{,}6$. La vitesse du mobile à l'instant t est donc 1,60 *m/s*.

8. L'espace parcouru entre deux instants t et t' est proportionnel à une aire mesurée sur le diagramme des vitesses.

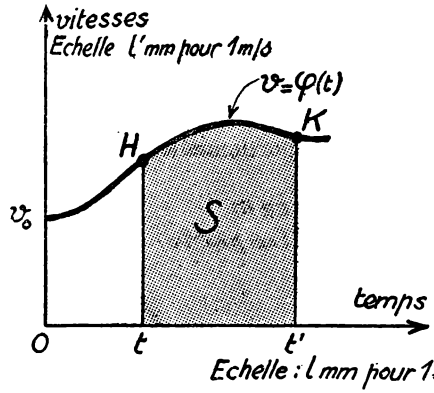


Fig. 7. — L'*espace parcouru* dans l'intervalle de temps $t' - t$ est proportionnel à l'aire S.

Nous l'avons déjà démontré pour quelques mouvements simples, mais cette propriété est générale[1] : l'espace e parcouru entre les instants t et t' est proportionnel à l'aire S d'un trapèze mixtiligne tracé sur le *diagramme des vitesses* (fig. 7).

$$e = \frac{S}{\mathcal{U}}.$$

III. — MOUVEMENT PROJETÉ

9. Projection sur un plan ou sur un axe de la trajectoire d'un point mobile.

Soient un plan P et un point M mobile sur une trajectoire T (fig. 8). A toute position du point M on peut faire correspondre un point m, *projection orthogonale du point M sur le plan P.*

Le point m décrit donc une trajectoire T', projection de T sur le plan P.

On définirait de même la projection de la trajectoire T sur un axe $x'x$.

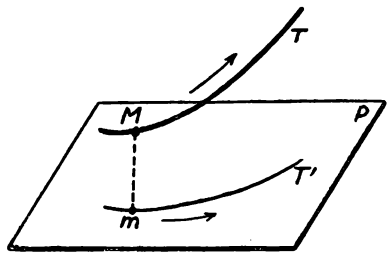


Fig. 8. — La trajectoire T' est la projection, sur le plan P, de la trajectoire T.

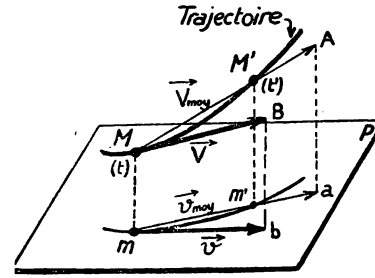


Fig. 9. — La vitesse du point mobile m est la projection sur le plan P de la vitesse du point mobile M.

1. La démonstration de cette propriété est une application du cours d'Algèbre des Écoles Nationales Professionnelles (4e année).

10. La vitesse v de la projection m est égale à la projection de la vitesse V du point M.

Soient M et M′ deux positions du mobile aux instants très voisins t et t' (fig. 9). *Ces points sont assez rapprochés pour qu'on puisse confondre l'arc MM′ et la corde MM′.*

Le vecteur $\overrightarrow{MA}$ représente la vitesse moyenne V_{moy} entre les instants t et t'

Sa projection sur le plan P est *ma*. Nous allons montrer que *le vecteur* $\overrightarrow{ma}$ *est la vitesse moyenne du point* m *entre les instants* t *et* t′. En effet :

1° les parallèles Mm, M′m′, Aa, déterminent sur MA et *ma* des segments proportionnels :

$$\frac{ma}{mm'} = \frac{MA}{MM'}.$$

2° la vitesse moyenne $V_{moy} = MA = \dfrac{MM'}{t' - t}$

Remplaçons MA par cette valeur dans l'égalité précédente :

$$\frac{ma}{mm'} = \frac{MM'}{MM'(t' - t)} = \frac{1}{t' - t}$$

d'où :

$$ma = \frac{mm'}{t' - t}$$

ce qui montre bien que *ma* est le quotient de l'espace parcouru *mm′* par le temps *t′—t* employé à le parcourir.

Conséquence. — Lorsque t' tend vers t, les vecteurs MA, $\overrightarrow{ma}$ tendent vers les vecteurs $\vec{V}$ et $\vec{v}$, tangents respectivement en M et m aux trajectoires T et T′. ***Le vecteur $\vec{v}$ est donc la projection du vecteur V sur le plan P.***

Remarque. — On montrerait de même que la vitesse de la projection du point M sur un axe $x'x$ est égal à la projection de la vitesse $\vec{V}$ du point M.

Nous avons appliqué cette propriété en étudiant le mouvement rectiligne sinusoïdal.

Résumé.

1. Le mouvement d'un point, sur une trajectoire quelconque, est déterminé à chaque instant si l'on connaît :

1° le sens dans lequel il se déplace;

2° la distance qui le sépare à cet instant de l'origine des espaces.

2. La loi des espaces et celle des vitesses s'écrivent à l'aide des formules :

$$\boxed{e = f(t)} \qquad \boxed{v = \varphi(t)}$$

Elles se traduisent par des diagrammes.

3. La vitesse est égale à la dérivée de l'espace par rapport au temps. On la représente, à un instant t, par un vecteur tangent à la trajectoire, au point correspondant à la position du mobile à cet instant.

4. La vitesse peut se mesurer sur le diagramme des espaces. Elle est proportionnelle à la pente d'une tangente à la courbe des espaces, au point correspondant à l'instant considéré.

5. Si l'on projette un point mobile M sur un plan ou sur un axe, la vitesse v de sa projection m est égale à la projection de sa vitesse V.

Exercices.

1. La figure 10 représente le diagramme de la levée d'une tige commandée par une came. Lire ce diagramme en indiquant :

a) les phases du mouvement; *b*) leur durée.

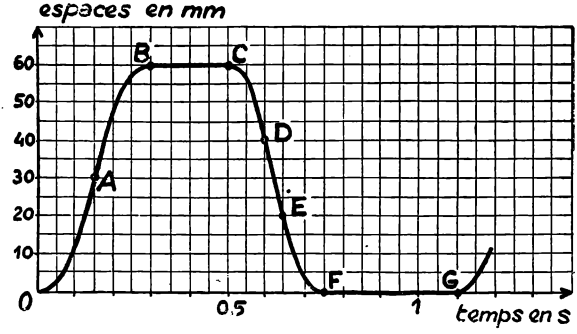


Fig. 10. — Les arcs OA, AB, CD, EF sont des arcs de parabole.
Les parties BC, DE, FG, sont rectilignes.

Les arcs de parabole ont des tangentes parallèles à l'axe des abcisses en O, B, C, F.
Les arcs OA, AB ont même tangente en A.
Enfin, la droite DE est tangente aux arcs de parabole en D et F.

Dresser le diagramme des vitesses correspondant.

2. La loi des espaces d'un mouvement rectiligne est définie par l'équation :

$$e = 5 + 16\ t - 2t^2.$$

Trouver la loi des vitesses. Dresser le diagramme des espaces et des vitesses.

3. Mêmes questions que précédemment pour le mouvement rectiligne défini par l'équation : $e = t^3 - 4t$.

Hodographe d'un mouvement uniformément varié.

1. Définition de l'hodographe d'un mouvement.

Lorsqu'un point mobile est en mouvement, sa vitesse, en chaque point de la trajectoire, est définie en direction, sens et grandeur par un vecteur.

Pour étudier les *variations de cette vitesse*, tant en direction qu'en grandeur, il est commode de ramener tous les vecteurs-vitesses à avoir la même origine.

1° Soit $\vec{v}_M$ le vecteur-vitesse d'un point mobile M à l'instant t (fig. 1).

Par un point O quelconque, menons un vecteur $\overrightarrow{OA}$ parallèle à $\vec{v}$, de même sens et de même grandeur.

Le vecteur $\overrightarrow{OA}$ est dit *équipollent* au vecteur $\vec{v}_M$.

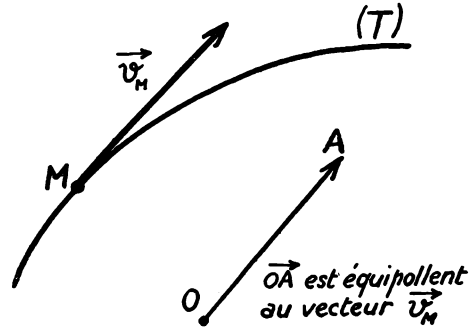


Fig. 1. — Par un point O quelconque, on peut mener un *vecteur équipollent* au vecteur vitesse d'un point mobile M.

2° A chaque vecteur-vitesse du point mobile M, faisons correspondre ainsi un vecteur équipollent d'origine O (fig. 2). Les extrémités A, A', A''... des vecteurs ainsi obtenus sont sur une courbe, appelée ***hodographe*** [1] ***du mouvement du point M.***

Le point O, *choisi arbitrairement*, est le *pôle de l'hodographe.*

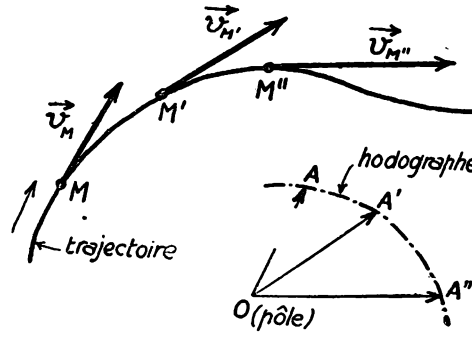


Fig. 2. — L'**hodographe du mouvement** d'un point mobile M est le lieu géométrique des extrémités des vecteurs de même origine O, équipollents aux vecteurs-vitesses du point M.

1. HODOGRAPHE : du grec *odos.* chemin, et *graphê:* description.

2. Hodographe d'un mouvement rectiligne uniformément accéléré. Vecteur accélération.

Considérons un point M animé d'un mouvement rectiligne uniformément accéléré tel que :

$$e_t = 3\,t + t^2; \qquad v_t = 3 + 2\,t.$$

Dressons le tableau des espaces parcourus et des vitesses correspondantes aux instants 0, 1, 2, 3, 4..... *secondes.*

Instants.	*Espaces parcourus.*	*Vitesses.*
$t_0 = 0$ *seconde*	$e_0 = 0$ *mètres*	$v_0 = 3$ *m/s*
$t_1 = 1$ —	$e_1 = 4$ —	$v_1 = 5$ —
$t_2 = 2$ —	$e_2 = 10$ —	$v_2 = 7$ —
$t_3 = 3$ —	$e_3 = 18$ —	$v_3 = 9$ —
$t_4 = 4$ —	$e_4 = 28$ —	$v_4 = 11$ —

A) Soient : M_0 la position initiale du point mobile, A, B, C, D, les points correspondant aux espaces e_1, e_2, e_3, e_4 (fig. 3).

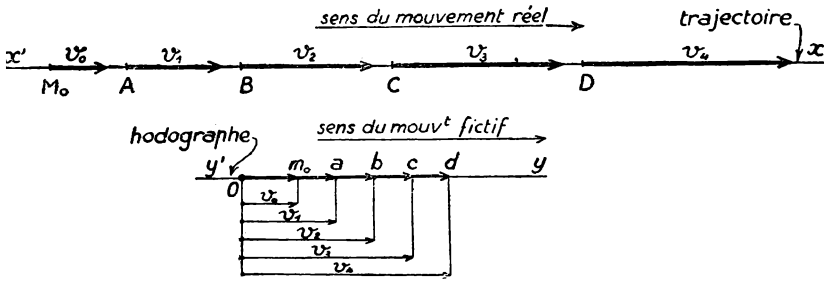


Fig. 3. — Hodographe du mouvement rectiligne uniformément accéléré.

En ces points, traçons les vecteurs-vitesses $\vec{v_0}, \vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots$ etc., à l'échelle de 5 *millimètres* pour 2 *m/s*, par exemple.

Remarquons que deux vecteurs-vitesses consécutifs ($\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ par exemple), diffèrent d'une quantité constante, qui mesure l'accélération du mouvement étudié, soit :

$$\gamma = 2 \text{ m/s par seconde.}$$

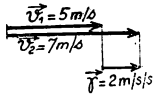


Fig. 4. — On passe du vecteur $\vec{v_1}$ au vecteur $\vec{v_2}$ en lui ajoutant le vecteur $\vec{\gamma}$, *de même sens* que le vecteur $\vec{v_1}$.

On passe donc du *vecteur-vitesse* $\vec{v_1}$ *au vecteur vitesse* $\vec{v_2}$ *en lui ajoutant un vecteur-accélération* (fig. 4), qui est ici de même sens que le vecteur vitesse $\vec{v_1}$.

B) Par le point quelconque O, menons des vecteurs équipollents aux vecteurs-vitesses. Ils ont

tous même direction et leurs extrémités m_0, a, b, c, d, sont portées par la doite $y'y$.

L'hodographe du mouvement est donc une droite.

C) Ce qui précède nous montre que sur l'hodographe (fig. 3) :

$$m_0a = ab = bc = cd.$$

Imaginons alors qu'un *mobile fictif m* décrive la droite $y'y$ de la manière suivante :

Il est en m_0 lorsque le mobile réel M est en M_0; en a, b, c, d, lorsque M est en A, B, C, D; c'est-à-dire qu'***à chaque position du mobile réel M sur sa trajectoire correspond une position bien définie du mobile fictif m sur l'hodographe.***

Comme le point M met 1 *seconde* pour aller de M_0 en A, 1 *seconde* pour aller de A en B,... etc., le mobile fictif *m* parcourt les *espaces égaux* m_0a, *ab*, *bc*, *cd*, en 1 *seconde*. *Son mouvement est donc rectiligne uniforme*, et sa vitesse a pour valeur numérique 2 *m/s*. Le vecteur qui la représente en un point de l'hodographe est donc équipollent au vecteur-accélération du mobile M au point correspondant A de la trajectoire (fig. 5).

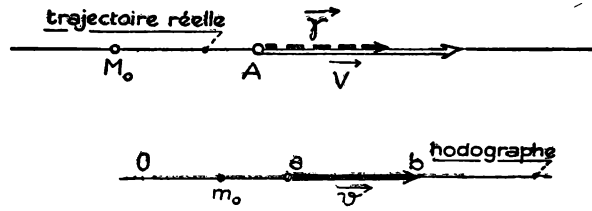


Fig. 5. — Le vecteur-vitesse $\vec{v}$ du mobile *m*, au point *a* de l'hodographe, est équipollent au vecteur-accélération $\vec{\gamma}$ du mobile M, au point correspondant A de la trajectoire.

CONCLUSION. — 1° ***L'hodographe du mouvement rectiligne uniformément accéléré est une droite.***

2° ***Le mouvement du mobile fictif m sur l'hodographe est uniforme et son vecteur-vitesse est équipollent au vecteur-accélération du point M sur sa trajectoire.***

3. Hodographe du mouvement rectiligne uniformément retardé.

Considérons de même un point M, animé d'un mouvement rectiligne uniformément retardé dans lequel :

$$e_t = 10t - t^2 \quad \text{et} \quad v_t = 10 - 2t$$

Au bout de 1, 2, 3 *secondes*, les espaces parcourus et les vitesses correspondantes ont les valeurs suivantes :

Instants.	*Espaces parcourus.*	*Vitesses.*
$t_0 = 0$ *seconde*	$e_0 = 0$ *mètres*	$v_0 = 10$ *m/s*
$t_1 = 1$ —	$e_1 = 9$ —	$v_1 = 8$ —
$t_2 = 2$ —	$e_2 = 16$ —	$v_2 = 6$ —
$t_3 = 3$ —	$e_3 = 21$ —	$v_3 = 4$ —

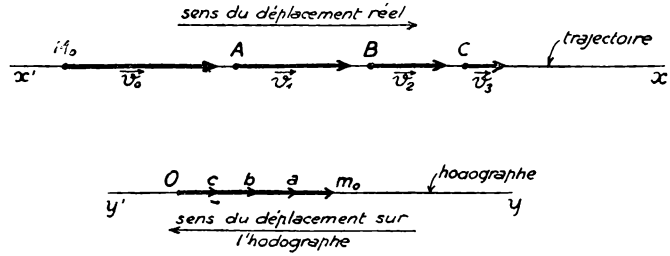


Fig. 6. — Hodographe du mouvement rectiligne uniformément retardé.

A) Plaçons sur la trajectoire $x'x$ les positions correspondantes A, B, C du point M à partir de sa position initiale M_0 (fig. 6).

En ces points, traçons les vecteurs-vitesses à l'échelle 2 *millimètres* pour 1 *m/s* par exemple.

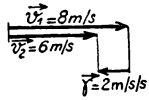


Fig. 7. — On passe du vecteur $\vec{v_1}$ au vecteur $\vec{v_2}$ en lui ajoutant le vecteur $\vec{\gamma}$ *de sens contraire.*

Observons qu'on passe du vecteur-vitesse $\vec{v_1}$ au vecteur-vitesse $\vec{v_2}$ en lui *ajoutant un vecteur de sens opposé* mesurant la décélération constante $\gamma = 2$ *m/s/s*. Ce vecteur est le vecteur-accélération du mouvement (fig. 7).

B) Par le point quelconque O, menons des vec-

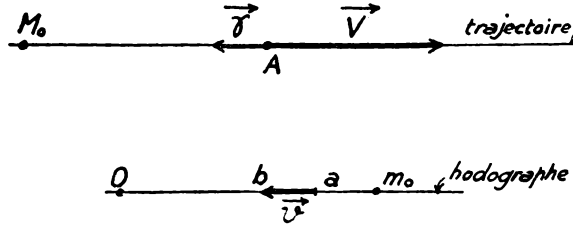


Fig. 8. — Le vecteur-vitesse $\vec{v}$ du mobile *m*, au point *a* de l'hodographe est équipollent au vecteur-accélération $\vec{\gamma}$ du mobile M, au point correspondant A de la trajectoire.

teurs équipollents aux vecteurs-vitesses $\overrightarrow{v_0}, \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}$. Ils sont portés par la droite $y'y$ parallèle à la trajectoire. *L'hodographe est donc une droite.*

Faisons correspondre au point M un point mobile fictif *m* sur l'hodographe.

Un raisonnement analogue à celui du paragraphe 2 nous montre que : *le vecteur-vitesse du point* m *est équipollent au vecteur-accélération du point M sur sa trajectoire* (fig. 8).

Résumé.

1. **Si l'on considère l'ensemble des vecteurs-vitesses d'un point mobile M sur sa trajectoire, on appelle *hodographe du mouvement* le lieu des extrémités des vecteurs ayant une origine commune O, et *équipollents* aux vecteurs-vitesses donnés.**
Le point quelconque O est le *pôle* de l'hodographe.
A chaque position du mobile M sur sa trajectoire correspond un point *m* sur l'hodographe.

2. **Dans un mouvement rectiligne uniformément varié (accéléré ou retardé), l'hodographe est une droite parallèle à la direction du mouvement.**
Le vecteur-vitesse du point mobile *m* sur l'hodographe est équipollent au vecteur-accélération du point correspondant M de la trajectoire.

Exercices.

1. Une bille descend un plan incliné avec une accélération $\gamma = 0{,}20$ *m/s/s* (vitesse initiale nulle).

A. Indiquer sur la trajectoire :

1° Les points atteints au bout de 1, 2, 3, 4 *secondes* (échelle 1 *cm* pour 0,1 *m*).

2° Les vecteurs-vitesses en ces points (échelle 1 *cm* pour 0,20 *m/s*).

B. Construire l'hodographe et tracer le vecteur-accélération à l'instant $t = 2$ *secondes*

2. Trouver l'hodographe d'un mouvement rectiligne uniforme. Qu'en conclure?

Hodographe d'un mouvement quelconque. Composantes normale et tangentielle de l'accélération.

1. L'accélération d'un point mobile se déduit de l'hodographe du mouvement.

Dans le mouvement rectiligne uniformément varié, le vecteur-vitesse a une *direction* constante : l'*hodographe est une droite.*

Au contraire, dans un mouvement circulaire uniforme, la vitesse

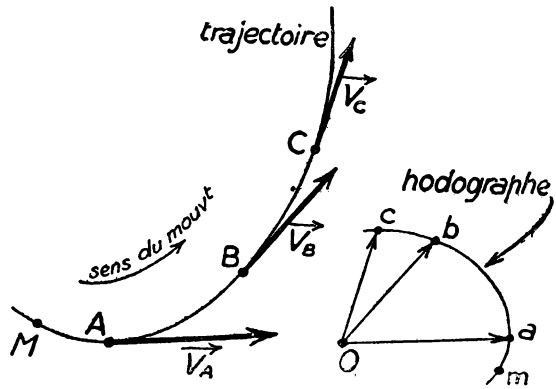


Fig. 1. — Dans un mouvement quelconque, l'*hodographe* est une courbe quelconque.

change sans cesse de direction : nous montrerons que *l'hodographe est un cercle.*

Dans le cas général du mouvement quelconque d'un point sur une trajectoire courbe, le vecteur-vitesse varie à la fois en grandeur et en direction : l'hodographe est une certaine courbe (fig. 1)[1].

1. Si la trajectoire est plane, l'hodographe est toujours une courbe plane. Si la trajectoire est une courbe gauche, l'hodographe peut être une courbe plane (Mouvement hélicoïdal uniforme par exemple) ou une courbe gauche.

Imaginons qu'un point mobile *fictif m* décrive l'hodographe de telle sorte qu'il passe en *a*, *b*, *c*, aux instants où le point M passe en A, B, C, sur sa trajectoire.

On démontre que : ***le vecteur-vitesse du mobile m sur l'hodographe est équipollent au vecteur-accélération du mobile M sur la trajectoire.***

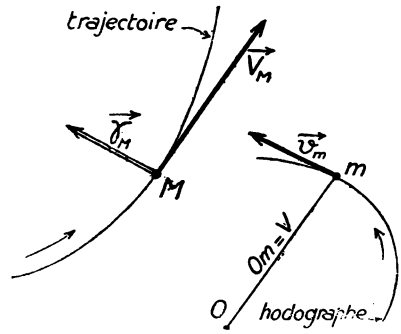


Fig. 2. — Dans un mouvement quelconque, le vecteur-vitesse $\vec{v}_m$ du mobile *m* sur l'hodographe est équipollent au vecteur-accélération $\vec{\gamma}$ du mobile M sur la trajectoire.

REMARQUES. — 1. De même que la vitesse, *l'accélération du mobile en un point M de la trajectoire*, est représentée par un vecteur ayant ce point M pour origine (fig. 2).

2. La valeur numérique de l'accélération à l'instant *t* s'exprime avec les mêmes unités de longueur et de temps que la vitesse du point fictif *m* au même instant.

Si, par exemple, $v_m = 5$ *m/s*, l'accélération $\gamma_M = 5$ *m/s/s*.

3. Le vecteur-accélération est toujours dirigé vers la concavité de la trajectoire.

2. Application : hodographe du mouvement circulaire uniforme.

Soient : R le rayon du cercle décrit par le mobile M;
ω sa vitesse angulaire constante (fig. 3).

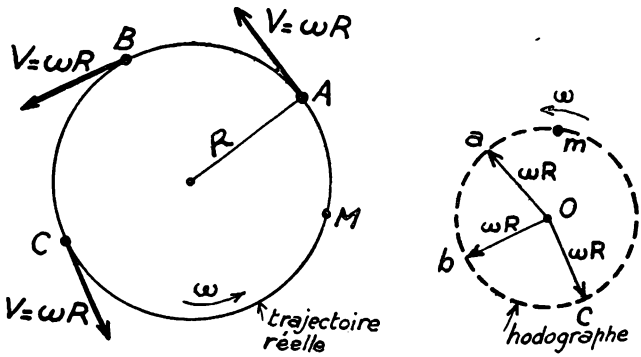


Fig. 3. — L'hodographe du mouvement circulaire uniforme est une circonférence. Le mobile fictif *m* a sur l'hodographe même vitesse angulaire ω que le mobile réel M sur la trajectoire réelle.

a) Le vecteur-vitesse du mobile M, $V = \omega R$, est constant en grandeur, mais sa direction varie.

Si par un point O quelconque, on mène des vecteurs équipollents aux vecteurs-vitesses du mobile M, leurs extrémités sont sur un cercle de centre O et de rayon $Oa = V = \omega R$: *l'hodographe est donc un cercle.*

b) Lorsque le point M est en A, B, C, le mobile fictif *m* est en *a*, *b*, *c*, sur l'hodographe, toujours en avance d'un quart de tour.

Après un tour du mobile M sur sa trajectoire, les deux mobiles M et *m* reprennent la même position. Le mobile *m* a donc même vitesse angulaire ω que le point A et sa vitesse linéaire *v* a pour expression :

$$v = \omega \times Oa = \omega \times \omega R = \omega^2 R.$$

c) Cette vitesse est représentée au point *a* de l'hodographe (fig. 4) par un vecteur $\vec{v}$, tangent en ce point à la circonférence décrite par le point *m*.

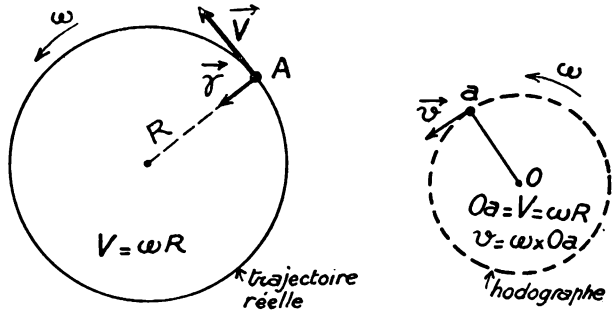


Fig. 4. — Dans un mouvement circulaire uniforme l'accélération γ du mobile, en chaque point de la trajectoire, est **centripète**. Elle a pour mesure : $\gamma = \omega^2 R = \frac{V^2}{R}$

Le vecteur-accélération $\vec{\gamma}$ du mobile M, quand il est au point A de sa trajectoire, est équipollent à $\vec{v}$. On voit donc :

1° *qu'il est perpendiculaire au vecteur-vitesse* $\vec{V}$*;*

2° *qu'il est dirigé vers le centre de la trajectoire :* c'est pourquoi on dit que l'*accélération est centripète*[1];

3° *qu'il a pour mesure:*

$$\gamma = \omega^2 R.$$

REMARQUE. — Puisque $V = \omega R$, l'accélération centripète d'un mouvement circulaire uniforme peut encore s'écrire :

$$\gamma = \frac{V^2}{R}.$$

1. Du latin : *centrum*, centre; et *petere*, gagner.

Cette formule est *très importante*. Un peu de réflexion permet de la retrouver.

En effet, l'accélération d'un mobile ne peut dépendre que des grandeurs qui définissent son mouvement. Dans le cas d'un *mouvement circulaire uniforme*, ces grandeurs sont :

1° le rayon ***R*** de la circonférence décrite, qui définit la *trajectoire ;*

2° la vitesse ***V*** du mobile qui définit le *mouvement* sur la trajectoire.

L'accélération γ *dépend nécessairement* de ces deux grandeurs et de ces deux grandeurs seulement.

Le calcul vient de nous démontrer qu'elle est :

1° *inversement proportionnelle* à R (ce que l'on peut prévoir en considérant une circonférence dont le rayon devient infiniment grand);

2° *directement proportionnelle* ***au carré*** de la vitesse linéaire V du mobile, ce que l'on peut aussi prévoir puisqu'elle a toujours le même sens (*centripète*) quel que soit le sens du mouvement sur la trajectoire.

APPLICATION NUMÉRIQUE. — *Une poulie fait* 180 *tr /mn. Son diamètre est de* 400 *mm. Calculer l'accélération d'un point de sa périphérie.*

Prenons comme unité de temps la *seconde* et comme unité de longueur le *mètre*

$$\begin{cases} \omega = \dfrac{\pi N}{30} = \dfrac{3{,}14 \times 180}{30} = 18{,}84 \ r/s \\ R = 200 \ mm = 0{,}20 \ m \end{cases}$$

Donc : $\gamma = \overline{18{,}84}^2 \times 0{,}2 = \mathbf{71} \ \boldsymbol{m/s/s}$

(soit plus de sept fois l'accélération due à la pesanteur).

3. Composantes normale et tangentielle de l'accélération d'un mouvement quelconque.

Bornons-nous au *cas où la trajectoire est plane.*

Nous avons vu que le vecteur-accélération d'un point mobile est :

1° *parallèle au vecteur-vitesse* dans le mouvement *rectiligne uniformément varié ;*

2° *perpendiculaire au vecteur-vitesse* dans le mouvement *circulaire uniforme*, et dirigé vers la concavité de la trajectoire.

On conçoit que dans un mouvement *circulaire varié*, et, en général, *dans un mouvement curviligne quelconque, le vecteur-accélération* soit *oblique* par rapport au vecteur-vitesse, et orienté vers la concavité de la trajectoire. Soient donc :

$\vec{V}$ le *vecteur-vitesse* en M d'un point mobile (il est porté par la tangente en M à la trajectoire).

$\vec{\gamma}$ le *vecteur-accélération* au même point (fig. 5).

Traçons M*n* perpendiculaire en M à la tangente M*t* (M*n* est la *normale* en M à la trajectoire).

De l'extrémité A du vecteur $\vec{\gamma}$ abaissons les perpendiculaires sur M*t* et M*n*.

Les vecteurs $\overrightarrow{MB}$ et $\overrightarrow{MC}$ représentent :

1° $\boldsymbol{\overrightarrow{MB}}$ **:** la projection orthogonale du vecteur $\vec{\gamma}$ sur la normale

en M à la trajectoire. On l'appelle ***composante normale de l'accélération*** $\vec{\gamma}$ et on la désigne par $\vec{\gamma}_n$.

2° $\overrightarrow{MC}$: la projection orthogonale du vecteur $\vec{\gamma}$ sur la tangente à la trajectoire au point M. On l'appelle ***composante tangentielle de l'accélération*** $\vec{\gamma}$, et on la désigne par $\vec{\gamma}_t$.

REMARQUE 1. — Les composantes $\vec{\gamma}_n$ et $\vec{\gamma}_t$ du vecteur $\vec{\gamma}$ sont rectangulaires. Par suite, dans le triangle rectangle MBA :

$$\overrightarrow{MA}^2 = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{BM}^2$$

d'où

$$\gamma^2 = \gamma_n^2 + \gamma_t^2.$$

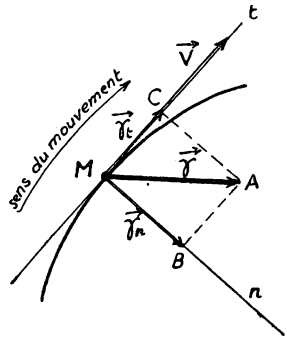


Fig. 5. — L'accélération γ est la *somme géométrique* d'une **composante normale** γ_n et d'une ***composante tangentielle*** γ_t.

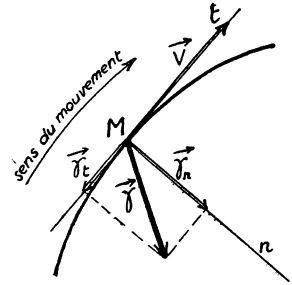


Fig. 6. — L'accélération tangentielle γ_t peut être dirigée en sens contraire du mouvement.

REMARQUE 2. — La *composante normale est toujours dirigée vers la concavité de la trajectoire.*

La *composante tangentielle* est orientée dans le sens du mouvement s'il est accéléré (fig. 5), en sens contraire s'il est retardé (fig. 6).

4. Valeur des composantes normale et tangentielle de l'accélération.

On démontre qu'en un point M de la trajectoire :

1° *la composante tangentielle* γ_t *est égale à la dérivée par rapport au temps de la vitesse linéaire en ce point:*

$$\gamma_t = \frac{dv}{dt}$$

2° *la composante normale* γ_n *est égale au carré de la vitesse en M divisé par le rayon de courbure* ρ *de la trajectoire en ce point :*

$$\gamma_n = \frac{v^2}{\rho}$$

Pour définir le *rayon de courbure* en un point M d'une courbe plane (*T*), menons les tangentes et les normales en deux points M et M' *infiniment voisins* (fig. 7). L'arc très petit MM' peut être considéré comme un arc de cercle de centre O et de rayon OM. Ce rayon OM est le rayon de courbure au point M de la trajectoire.

Dans un cercle, le rayon de courbure est constant et égal évidemment au rayon du cercle, puisque toutes les normales passent par son centre.

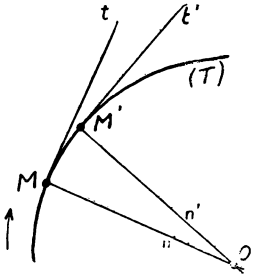


Fig. 7. — M et M' sont des points *infiniment voisins*. Les normales en ces points à la trajectoire se coupent au *centre de courbure*.

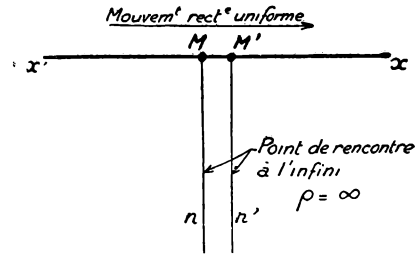


Fig. 8. — Dans un mouvement rectiligne, le centre de courbure est à l'infini. Le *rayon de courbure* est lui-même infini.

Application au mouvement rectiligne uniforme.

La tangente en un point M est portée par la trajectoire elle-même. Deux normales en deux points M et M' très voisins sont parallèles : le centre de courbure est infiniment éloigné (fig. 8). Donc :

$$\rho = \infty$$

Soit *v* la *vitesse constante* du point mobile. Les composantes de l'accélération sont respectivement :

$$\gamma_t = \frac{dv}{dt} = \text{dérivée d'une constante} = 0$$

$$\gamma_n = \frac{v^2}{\infty} = 0.$$

L'accélération d'un mouvement rectiligne uniforme est donc nulle. On peut d'ailleurs le voir facilement par la méthode de l'hodographe.

Application au mouvement circulaire uniforme.

Le rayon de courbure de la trajectoire est constant : $\rho = R$.

La vitesse linéaire V est constante.

Les composantes de l'accélération ont pour valeur :

$$\gamma_t = \frac{dV}{dt} = 0$$

$$\gamma_n = \frac{V^2}{\rho} = \frac{V^2}{R}.$$

L'accélération se réduit donc à l'accélération centripète.

REMARQUE. — *Revenons au cas général.* La composante tangentielle γ_t, *en un point de la trajectoire,* dépend seulement de *la variation de la vitesse* au voisinage de ce point : elle ne dépend, ni de la grandeur de la vitesse, ni de la forme de la trajectoire en ce point.

La composante normale $\vec{\gamma}_n$, *en un point de la trajectoire,* ne dépend que de *la grandeur de la vitesse* en ce point et de *la forme de trajectoire* au même point : elle ne dépend pas des variations de la vitesse.

La composante normale de l'accélération a pour effet de *modifier la direction* de la vitesse, afin d'obliger le mobile à suivre la trajectoire qui est courbe. On l'appelle aussi, pour cette raison, *accélération déviatrice.*

5. Application au mouvement circulaire uniformément accéléré.

Lorsqu'une poulie démarre, la *vitesse linéaire* d'un point M de cette poulie part de 0, croît, puis reste constante quand le régime de marche est atteint.

Ce point mobile M, ayant une vitesse croissante pendant le démarrage, possède une certaine *accélération tangentielle* $\gamma_t = \frac{dv}{dt}$ de même sens que la vitesse : accélération *constante* si le mouvement est uniformément accéléré.

Il a aussi une *accélération normale* $\gamma_n = \frac{v^2}{R}$. v étant la vitesse à l'instant considéré : accélération *croissante* avec v.

Le *vecteur-accélération* (appelé quelquefois *accélération totale*) est le *vecteur* $\vec{\gamma}$, somme géométrique des deux vecteurs $\vec{\gamma}_t$ et $\vec{\gamma}_n$: il est incliné sur la normale.

EXEMPLE NUMÉRIQUE. — Une poulie fait 180 *tr/mn* en régime normal. Son diamètre est de 400 *mm.* Lorsqu'elle part du repos, elle met 4 secondes pour atteindre sa vitesse de régime.

En admettant que son mouvement soit uniformément accéléré pendant le démarrage, calculer les valeurs numériques de l'accélération tangentielle, de l'accélération normale, de l'accélération totale aux instants suivants : 0 *s*, 1 *s*, 2 *s*, 3 *s*, 4*s*, après le départ, pour un point de la périphérie.

Construire 5 trajectoires (*échelle* 1/2). Marquer sur chacune d'elles l'une des positions du mobile aux instants ci-dessus et représenter les vecteurs correspondants $\vec{\gamma}_t$, $\vec{\gamma}_n$, $\vec{\gamma}$ (*échelle des accélérations* : 5 *mm* pour 1 *m/s/s*).

A l'instant 0, *le démarrage commence exactement. A l'instant* 4, *le démarrage vient de s'achever.*

RÉPONSES : elles sont contenues dans le tableau suivant :

Temps	γ_t	γ_n	γ
0 s	0,94 m/s/s	0 m/s/s	0,94 m/s/s
1 —	0,94 —	4,42 —	4,51 —
2 —	0,94 —	17,67 —	17,69 —
3 —	0,94 —	39,76 —	39,77 —
4 —	0 —	70,68 —	70,68 —

Résumé.

1. **Dans un mouvement quelconque, le vecteur-accélération d'un point mobile est, à chaque instant, équipollent au vecteur-vitesse du point correspondant de l'hodographe.**

2. **A un instant donné :**

a) **la *composante tangentielle* de l'accélération γ_t est égale à la dérivée de la vitesse par rapport au temps.**

$$\gamma_t = \frac{dv}{dt}$$

b) **la *composante normale***

$$\gamma_n = \frac{v^2}{\rho}$$

v : vitesse linéaire à l'instant t
ρ : rayon de courbure de la trajectoire au point où se trouve le mobile à l'instant t.

3. **Dans un mouvement circulaire uniforme de vitesse linéaire V, l'accélération du point mobile est *centripète*. Elle a pour valeur :**

$$\gamma = \frac{V^2}{R} \qquad (R : \text{rayon de la trajectoire})$$

ou encore $\gamma = \omega^2 R$ (ω : vitesse angulaire constante).

Exercices.

1. Une poulie de 120 *mm* de diamètre tourne à raison de 1 500 *tr/mn*. Calculer en *m/s/s* l'accélération centripète d'un point de sa périphérie.

2. Une automobile roulant à la vitesse constante de 60 *km/h* aborde un tournant dont le rayon moyen est de 50 *mètres*. Calculer l'accélération centripète d'un point de cette automobile situé sur le rayon moyen.

3. Un poids P, attaché à l'extrémité libre d'un câble enroulé sur la jante d'une poulie mobile, tombe d'une hauteur de 1 *mètre* en partant du repos (fig. 9).
Le mouvement est uniformément accéléré. La durée de la chute est 2 *secondes*. Le rayon de la poulie est de 0,15 *m*.
1° Calculer l'accélération et la vitesse à l'arrivée au sol du poids P;

2° A chaque instant, l'accélération du point M de tangence a :

— une composante tangentielle;

— une composante centripète due à son mouvement circulaire. Calculer l'accélération du point M à l'instant où le poids P touche le sol.

(On remarquera que la vitesse linéaire du point M est à chaque instant égale à celle du poids P.)

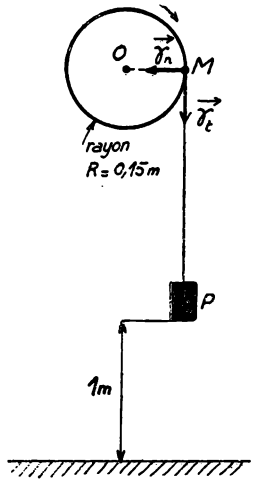


Fig. 9.

4. Soient a le demi-grand axe d'une ellipse;

b son demi-petit axe.

On démontre que le rayon de courbure de l'ellipse aux extrémités du grand axe a pour valeur : $\rho = \frac{b^2}{a}$.

De même, le rayon de courbure aux extrémités du petit axe a pour valeur : $\rho = \frac{a^2}{b}$.

Une ellipse dont les demi-axes sont respectivement :

$$a = 10\ cm; \qquad b = 5\ cm;$$

est parcouru par un point mobile à la vitesse constante de 0,5 *m s*.

1° Tracer l'ellipse en vraie grandeur en utilisant la valeur des rayons de courbure aux extrémités des axes;

2° Représenter les vecteurs-vitesses aux extrémités des axes (*échelle : 10 cm pour 1 m s*);

3° Représenter les divers vecteurs-accélérations aux mêmes points.

5. *Etude d'un étau-limeur réglé.*

La course d'un étau-limeur est réglée à 400 *mm*. A l'aide du dispositif de la figure 10, on a mesuré l'espace parcouru par la pointe M de l'outil en fonction de l'angle de rotation de la manivelle (*origine des espaces* : le point où commence la course de travail). D'où le tableau suivant :

Angle de rotation.	0°	18°	36°	54°	72°	90°	108°	126°	144°	162°	180°
Espace en *mm*	0	11	39	77	122	170	220,5	268	313	353	383
Angle de rotation	198°	207°	216°	234°	252°	270°	288°	306°	324°	342°	360°
Espace en *mm*	399	400	398	370	318,5	249	172	99	42	9	0

On fait tourner la manivelle à la *vitesse constante* de 30 *tr/mn*.

1° Sachant que la course de travail correspond à une rotation de 207° de la manivelle, calculer :

a) la durée de la *course aller* et celle de la *course retour;*

b) la *vitesse moyenne* de l'outil à l'aller et au retour.

2° Tracer le *diagramme des espaces* du point M (choisir les échelles des temps et des espaces de manière à obtenir un diagramme de grandes dimensions).

3° Déterminer sur ce diagramme les *vitesses instantanées* du point M à des instants suffisamment rapprochés. Tracer sur le même diagramme la *courbe des vitesses*.

4° Tracer l'*hodographe* du mouvement de la course aller (dessiner la trajectoire du point M en vraie grandeur : marquer des points espacés de 40 *mm* et représenter, en chacun d'eux, les vecteurs-vitesses).

Tracer le diagramme des espaces du mobile fictif *m* qui décrit l'hodographe. En déduire les valeurs numériques des vitesses de *m*, donc les valeurs numériques de l'accélération du point mobile M.

5° Opérer de même pour la course retour.

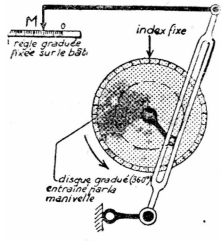


Fig. 10.

Composition de deux mouvements rectilignes uniformes.

1. Exemples de corps soumis à des mouvements simultanés.

1er EXEMPLE. — Le voyageur assis dans un train en marche est immobile par rapport au train; il est en mouvement par rapport à la Terre.

S'il marche dans le couloir du wagon, il est en mouvement par rapport au train, qui, lui, est en mouvement par rapport à la Terre.

On dit que le voyageur est animé, *par rapport à la Terre*, de deux mouvements :

1° le mouvement dû au train qui l'entraîne avec lui ou *mouvement d'entraînement;*

2° le mouvement dû à son déplacement par rapport au train ou *mouvement relatif.*

Son mouvement par rapport à la Terre est dit *mouvement absolu.*

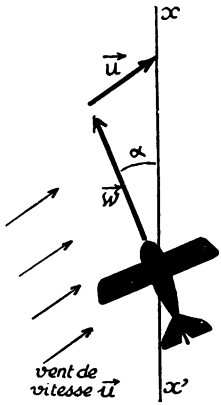


Fig. 1. — *Par rapport à l'air* l'avion a une vitesse *w*. *Par rapport au sol*, l'air a une vitesse *u*. Le mouvement absolu de l'avion se fait suivant *x'x*.

2e EXEMPLE. — Un enfant marche sur la piste d'un manège de chevaux de bois qui tourne.

Son mouvement, par rapport au sol, résulte :

1° d'un mouvement de rotation du manège qui l'entraîne *(mouvement d'entraînement);*

2° d'un mouvement de marche sur la piste du manège *(mouvement relatif).*

3e EXEMPLE. — Par temps calme un avion vole en ligne droite avec la vitesse *w*. Il aborde une région où le vent souffle avec une vitesse *u* (fig. 1).

Son mouvement, *par rapport au sol*, résulte d'un mouvement d'entraînement dû au vent et d'un mouvement par rapport à l'air qui l'environne (mouvement relatif).

La dérive ou angle de dérive est l'angle α que doit faire l'axe de

l'avion avec la route à suivre, pour rester sur cette route, malgré l'influence du vent qui tend à le déporter.

4e EXEMPLE. — La pointe d'un outil de tour (fig. 2) peut être animée, par rapport au banc de tour, d'un mouvement qui résulte :

1° d'un mouvement d'entraînement du traînard sur le banc de tour (*flèche* 1);

2° d'un mouvement relatif de l'outil par rapport au traînard, dû au déplacement du chariot qui le porte (*flèche* 2).

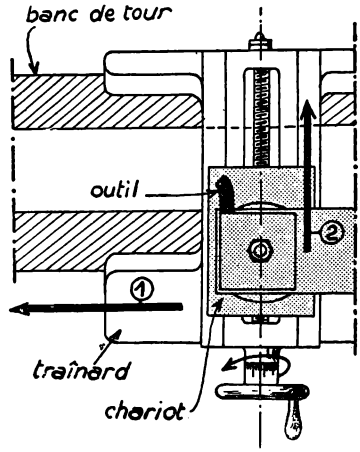


Fig. 2. — Le mouvement du traînard (*flèche* 1) *par rapport au banc* est le **mouvement d'entraînement** Celui de l'outil *par rapport au traînard* (*flèche* 2) est le **mouvement relatif.**

Les explications précédentes permettent de généraliser et de préciser le problème de la composition de deux mouvements.

1° *Nous supposerons connu le mouvement d'un point mobile M par rapport à un système de comparaison (S);*

2° *Nous supposerons aussi connu le mouvement du système (S) par rapport à un autre système de comparaison (S_0);*

3° *Nous chercherons le mouvement du mobile par rapport à (S_0).*

Mouvement de M par rapport à (S) = mouvement relatif.
— de S — (S_0) = — d'entraînement
— de M — (S_0) = . — résultant.

Chercher le mouvement résultant, connaissant le mouvement relatif et le mouvement d'entraînement, c'est *composer* ces deux derniers.

2. Composition de deux mouvements rectilignes uniformes de même direction.

Reprenons l'exemple du voyageur marchant dans le couloir d'un wagon en mouvement (fig. 3).

1° En une seconde, le train avance de 10 *mètres par rapport au sol.* Le voyageur, marchant dans le même sens, avance, *par rapport au wagon,* de 2 *mètres.*

Par rapport au sol, il avance de 10 + 2 = 12 *mètres* pendant chaque seconde.

2° Si le voyageur marche en sens contraire du train, il avance par rapport au sol de 10 — 2 = 8 *mètres* pendant chaque seconde.

Le mouvement, par rapport au sol, ou mouvement résultant, est donc uniforme dans les deux cas.

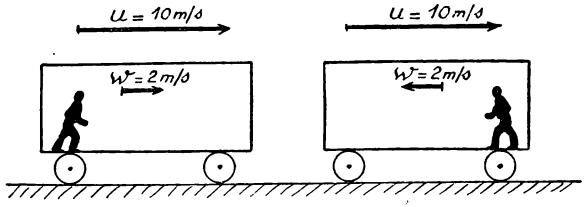


Fig. 3. — Le wagon se déplace, *par rapport au sol*, avec la vitesse *u (mouvement d'entraînement)*. Le voyageur marche sur le plancher du wagon avec la vitesse *w par rapport au wagon (mouvement relatif)*.

GÉNÉRALISONS. — Sur une droite $x'x$, considérons un point mobile M dont le mouvement uniforme a une vitesse w par rapport à cette droite *(mouvement relatif)*. Imaginons que la droite $x'x$ glisse sur elle-même avec une vitesse constante u *(mouvement d'entraînement)*.

Nous pouvons distinguer deux cas :

1er CAS : ***les vitesses u et w ont le même sens*** (fig. 4).

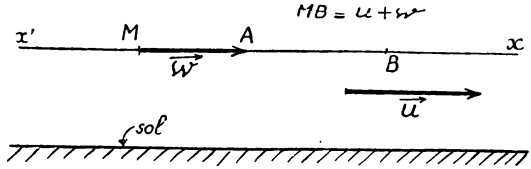


Fig. 4. — En une seconde : le mobile M avance sur $x'x$ de **w** mètres; la droite $x'x$ avance par rapport au sol de **u** mètres. Par rapport au sol, le mobile M a donc une vitesse $v = u + w$, représentée par MB.

Pendant chaque seconde : le point M avance sur la droite de w mètres; la droite xx' avance dans le même sens de u mètres.

Par rapport au sol le point M a donc avancé de : $w + u = v$ mètres.

Le mouvement résultant du point M est donc rectiligne uniforme et sa vitesse v *est égale à la somme des vitesses des mouvements composants.*

$$v = w + u.$$

2e CAS : ***les vitesses u et w sont de sens contraires*** (fig. 5).

Pendant chaque seconde : le point M avance sur la droite de w mètres; la droite $x'x$ avance en sens contraire de u mètres.

Il est facile de voir que le point M avance, *dans le sens de la plus grande des vitesses* w *et* u, d'une quantité égale à leur différence. *Le*

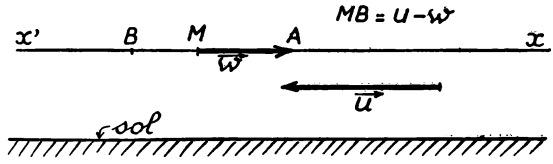


Fig. 5. — En une seconde : le mobile M avance sur $x'x$ de w mètres ; la droite $x'x$ avance par rapport au sol de u mètres en sens contraire. Par rapport au sol, le mobile M a donc une vitesse $v = u - w$ représentée par MB.

mouvement résultant du point M est donc rectiligne uniforme et sa vitesse v *est égale à la différence des vitesses des mouvements composants.*

$$v = u - w.$$

En particulier, si les valeurs numériques des vitesses u et w sont égales, $v = 0$ et par suite, le point M demeure immobile par rapport au sol. C'est ce que nous observons lorsqu'un nageur essaie de remonter le courant d'un fleuve et reste en place par rapport à la rive. La vitesse du courant (mouvement d'entraînement) est égale et opposée à la vitesse du nageur par rapport au courant (mouvement relatif).

Remarque. — Choisissons sur la direction $x'x$ un sens positif, celui de x' vers x par exemple (fig. 4 et 5). Les vitesses w et u sont dites *positives* si les vecteurs qui les représentent sont de sens positif ; elles sont dites *négatives* dans le cas contraire.

Ce qui précède nous montre que ***la vitesse v du mouvement résultant est égale à la somme algébrique des vitesses relative et d'entraînement.***

3. Composition de deux mouvements rectilignes uniformes de directions différentes.

Etudions le mouvement

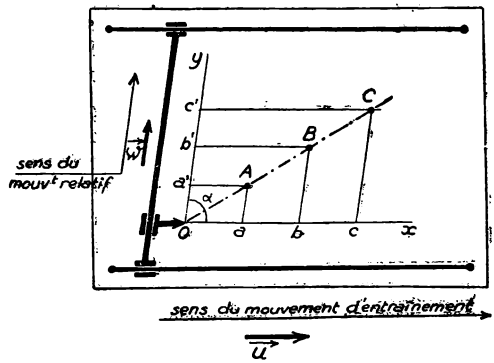


Fig. 6. — En glissant sur ses tringles la barre entraîne le curseur *(mouvement d'entraînement)*. Celui-ci peut glisser sur la barre *(mouvement relatif)*.

absolu d'un point mobile qui, partant de O (fig. 6), est animé simultanément :

1° d'un mouvement d'entraînement rectiligne uniforme de vitesse u;

2° d'un mouvement relatif rectiligne de vitesse w

dont les directions font entre elles l'angle α.

A. ***Trajectoire du point mobile.*** — Si le mouvement d'entraînement existait seul, le point mobile serait en a au bout de 1 *seconde.*

Si le mouvement relatif existait seul, le point mobile serait en a' au bout de 1 *seconde.*

Quand les deux mouvements ont lieu simultanément, dans l'intervalle de 1 seconde, le point mobile avance de Oa dans le sens de O vers x, et d'une longueur égale à Oa' dans le sens de O vers y. Il est donc en un point A obtenu en menant aA parallèle et égal à Oa'.

De même, au bout de 2 *secondes,* il est en B; au bout de 3 *secondes,* en C,... etc., et l'on a :

$$b\mathrm{B} = \mathrm{O}b' \qquad c\mathrm{C} = \mathrm{O}c'.$$

Les points A, B, C,... sont sur une droite passant par O.

On peut le démontrer facilement : les triangles OaA, ObB, OcC sont semblables. En effet : 1° les angles en a, b, c sont égaux comme correspondants;

2° les côtés qui comprennent ces angles sont dans le même rapport :

$$\frac{a\mathrm{A}}{\mathrm{O}a} = \frac{w}{u}; \quad \frac{b\mathrm{B}}{\mathrm{O}b} = \frac{2w}{2u}; \quad \frac{c\mathrm{C}}{\mathrm{O}c} = \frac{3w}{3u} \quad \text{d'où} \quad \frac{a\mathrm{A}}{\mathrm{O}a} = \frac{b\mathrm{B}}{\mathrm{O}b} = \frac{c\mathrm{C}}{\mathrm{O}c}$$

Les points A, B et C sont donc alignés.

La trajectoire est donc rectiligne.

B. ***Nature et vitesse du mouvement.*** — Les segments *égaux* OA, AB, BC, sont parcourus en *des temps égaux* (une seconde) : le mouvement rectiligne résultant est donc uniforme et sa *vitesse absolue* est mesurée par OA.

Nous remarquons que *cette vitesse est représentée au point O en direction, sens et grandeur, par un vecteur* $\vec{v}$, *d'origine O, égal à la diagonale du parallélogramme construit sur les vecteurs-vitesses des mouvements composants* (fig. 7).

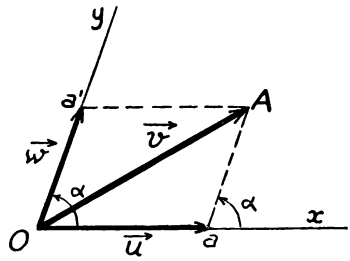


Fig. 7. — La vitesse du **mouvement résultant** est représentée en direction, sens et grandeur, par la diagonale OA du **parallélogramme des vitesses** des mouvements composants.

On dit encore que le vecteur $\vec{v}$ est égal à la *somme géométrique* des vecteurs $\vec{w}$ et $\vec{u}$, propriété que l'on traduit par l'*égalité vectorielle :*

$$\vec{v} = \vec{w} + \vec{u}$$

Calculons la *valeur numérique* de la vitesse v. Dans le triangle quelconque OaA, on a :

$$\overline{\mathrm{OA}}^2 = \overline{\mathrm{O}a}^2 + \overline{a\mathrm{A}}^2 + 2\,\overline{\mathrm{O}a} \times \overline{a\mathrm{A}} \cos \alpha$$

d'où

$$v^2 = w^2 + u^2 + 2uw \cos \alpha.$$

Application numérique. — Soient

$$u = 5 \text{ m/s}, \quad w = 2 \text{ m/s}, \quad \alpha = 60°$$

donc $\cos \alpha = 0{,}5.$

La vitesse cherchée est :

$$v^2 = 25 + 4 + 2 \times 5 \times 2 \times 0.5 = 39$$

$$v = \sqrt{39} = 6{,}24 \text{ m/s}$$

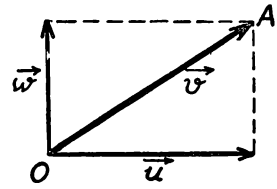


Fig. 8.
Ici : $v^2 = u^2 + w^2$.

CAS PARTICULIER : Les directions des mouvements composants sont rectangulaires (fig. 8).

Le vecteur $\vec{v}$ est la diagonale du rectangle $OaAa'$:

$$v^2 = u^2 + w^2$$

Résumé.

1. Le mouvement d'un mobile, par rapport à un système de comparaison (S_0), peut résulter de deux mouvements simultanés :
1° le ***mouvement relatif*** de ce mobile par rapport à un autre système de comparaison (S) ;
2° le ***mouvement d'entraînement*** du système (S) par rapport au système (S_0).
Le mouvement du point mobile **M**, par rapport au système (S_0), est dit : ***mouvement résultant.***
Chercher le mouvement résultant, c'est ***composer*** le mouvement relatif et le mouvement d'entraînement.

2. Le mouvement résultant de deux mouvements rectilignes uniformes, de ***même direction,*** est un mouvement rectiligne uniforme de même direction. Sa vitesse v est égale à la somme algébrique des vitesses u et w des mouvements composants.

3. Le mouvement résultant de deux mouvements rectilignes uniformes, de ***directions différentes,*** est un mouvement rectiligne uniforme.
Sa vitesse v est représentée en direction, sens et grandeur, par la diagonale du parallélogramme construit sur les vecteurs-vitesses des mouvements composants.

$$\vec{v} = \vec{u} + \vec{w}$$

Exercices.

1. Dans un magasin de nouveautés un acheteur emprunte un tapis roulant pour aller à l'étage supérieur. Pour aller plus vite, il marche sur le tapis. Définir son mouvement par rapport au sol.

2. Un bateau se meut dans la direction Ay avec une vitesse constante de 2 *m/s* (fig. 9). Le courant de la rivière étant de 1 *m/s*, calculer :
1° le temps mis par le bateau pour aller d'une rive à l'autre;
2° sa vitesse résultante;
3° la distance qui sépare Ay du point d'arrivée;
Que devra faire l'homme de barre pour corriger cette dérive?

3. Un treuil, mobile sur un pont roulant, se déplace en même temps qu'il soulève une charge (fig. 10). Les deux mouvements sont rectilignes uniformes :

$$w = 0{,}30\ m/s; \quad u = 0{,}40\ m/s.$$

Nature du mouvement de la charge? Déterminer sa vitesse en grandeur, direction et sens.

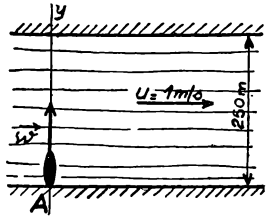


Fig. 9.

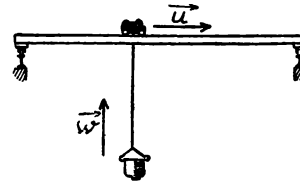


Fig. 10.

4. Composer deux mouvements rectilignes uniformément accélérés dont les directions font entre elles un angle α et dont les accélérations sont respectivement γ et γ'.

1° Nature de la trajectoire du mouvement résultant.

2° Vitesse du mouvement résultant à un instant quelconque t.

Composition de deux mouvements. Mouvement parabolique. Mouvement hélicoïdal.

I. — COMPOSITION DES VITESSES DE DEUX MOUVEMENTS QUELCONQUES SIMULTANÉS

Considérons un point M animé de deux mouvements simultanés.

Si le mouvement relatif existait seul le point M décrirait une certaine trajectoire T_r (fig. 1).

Si le mouvement d'entraînement existait seul, il décrirait une trajectoire T_e.

En réalité, le point M décrit une *trajectoire* T qui résulte de la simultanéité des mouvements relatif et d'entraînement.

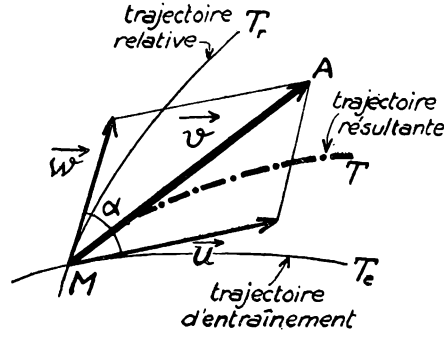


fig. 1. — w et u étant à un instant t, les vitesses relative et d'entraînement, la vitesse v du mouvement résultant, à l'instant t, est représentée par la diagonale MA du **parallélogramme des vitesses.**

On démontre que : ***la vitesse $\vec{v}$ du mouvement résultant, à un instant quelconque t, est représentée en direction, sens et grandeur, par la diagonale du parallélogramme construit sur les vecteurs des vitesses relative et d'entraînement au même instant.***

Autrement dit, le vecteur $\vec{v}$, tangent en M à la trajectoire T, est la *somme géométrique* des vecteurs-vitesse d'entraînement $\vec{u}$ et vitesse relative $\vec{w}$.

$$\vec{v} = \vec{u} + \vec{w}$$

II. — COMPOSITION D'UN MOUVEMENT RECTILIGNE UNIFORME ET D'UN MOUVEMENT RECTILIGNE UNIFORMÉMENT ACCÉLÉRÉ, DE DIRECTIONS DIFFÉRENTES : MOUVEMENT PARABOLIQUE.

1. Fait d'observation : mouvements simultanés d'une bille.

a) Un voyageur, dans un wagon au repos, laisse tomber une bille

d'un certain point A (fig. 2). Elle décrit la verticale AB, en t secondes, d'un mouvement uniformément accéléré.

b) Le voyageur ramasse la bille et la maintient en A. Le wagon se met en marche. Quand il roule d'un mouvement uniforme de vitesse u, tous les objets fixes par rapport au wagon (en particulier la bille), sont entraînés à la même vitesse u.

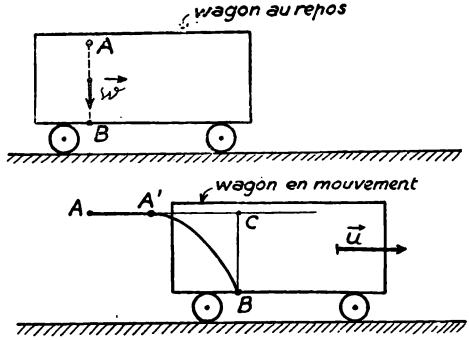


Fig. 2 et 3. — Que le wagon soit *au repos* ou en *mouvement uniforme* la bille tombe toujours au même point B du wagon.

Au point A' (fig. 3), le voyageur abandonne la bille à nouveau. Il constate :

1° *qu'elle tombe au même point B du wagon;*

2° *que la durée* t *de la chute est la même que si le wagon était demeuré immobile.*

CONCLUSION. — *Que le wagon soit en repos ou en mouvement rectiligne uniforme par rapport au sol, le mouvement relatif de la bille par rapport au wagon est toujours le même :* rectiligne, vertical de haut en bas, uniformément accéléré.

Le mouvement de la bille *par rapport au sol* résulte donc de deux mouvements simultanés :

1° un *mouvement d'entraînement* rectiligne uniforme de vitesse u;

2° un *mouvement relatif* uniformément accéléré de direction verticale.

Ces deux mouvements ont des directions perpendiculaires.

2. La trajectoire absolue de la bille est un arc de parabole.

Au point A' où la bille commence à tomber, traçons deux axes rectangulaires, *fixes par rapport au sol :*

A'x de même direction et de même sens que le mouvement d'entraînement dont la vitesse est u;

A'y de même direction et de même sens que le mouvement relatif dont l'accélération est g (fig. 4).

A un instant quelconque t, la bille est en un certain point M, défini par ses coordonnées :

$$A'm' = x \qquad A'm = y$$

Or : 1° A'm' est l'espace qu'aurait parcouru la bille, *à l'instant t,* si le mouvement d'entraînement avait seul existé :

$$A'm' = x = ut \qquad (1)$$

2° A'm est l'espace qu'aurait parcouru la bille, *au même instant*, si le wagon était resté immobile :

$$A'm = y = \frac{1}{2} gt^2 \qquad (2)$$

De (1) nous tirons : $t = \frac{x}{u}$; d'où $y = \frac{1}{2} g \times \frac{x^2}{u^2}$, soit en posant $\frac{g}{2u^2} = k = \text{constante}$: $\boldsymbol{y = kx^2}$.

CONCLUSION. — *Les ordonnées de la trajectoire absolue sont proportionnelles aux carrés des abscisses : cette trajectoire est donc une* ***parabole.***

Le mouvement de la bille est dit parabolique.

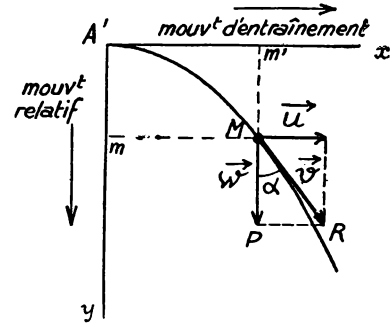


Fig. 4. — La trajectoire du point M est une **parabole.**

3. Vitesse absolue en un point de la trajectoire.

La vitesse absolue à un instant donné est représentée par un vecteur $\vec{v}$ tangent à la trajectoire absolue (fig. 4). Sa grandeur est mesurée par la diagonale du parallélogramme construit sur les vecteurs vitesse d'entraînement et vitesse relative.

Ces vecteurs étant rectangulaires, on a :

$$v^2 = u^2 + w^2.$$

Si l'on désigne par α l'angle du vecteur $\vec{v}$ avec la verticale :

$$\text{tg } \alpha = \frac{u}{w}.$$

Application numérique. — *Soit* u = 5 *m/s la vitesse du mouvement d'entraînement. Déterminer la position et la vitesse* v *de la bille après* 0,5 *seconde de chute.*

1° Les coordonnées du centre de la bille, après 0,5 *s* de chute sont respectivement :

$$x = u \times t = 5 \times 0{,}5 = \boldsymbol{2{,}5\ m}$$

$$y = \frac{1}{2} gt^2 = \frac{1}{2} \times 9{,}81 \times 0{,}25 = \boldsymbol{1{,}22\ m}$$

2° La vitesse v a pour expression $v = \sqrt{u^2 + w^2}$.

$$u = 5\ m/s; \qquad w = gt = 9{,}81 \times 0{,}5 = 4{,}90\ m/s$$

d'où : $$v = \sqrt{25 + 24} = \boldsymbol{7\ m/s}$$

La direction de la vitesse v fait avec la verticale un angle α tel que :

$$\text{tg } \alpha = \frac{u}{w} = \frac{5}{4{,}9} = 1{,}02; \qquad \text{d'où } \alpha \simeq \boldsymbol{45°35'}$$

4. Mouvement des projectiles.

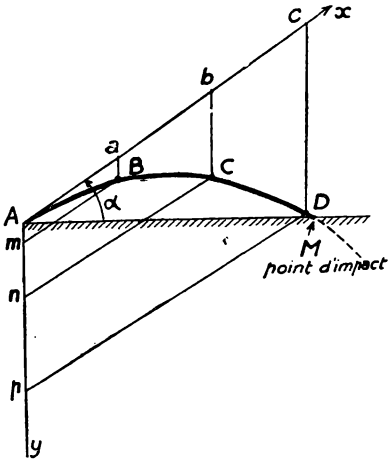


Fig. 5. — Un projectile lancé de A vers x décrit une parabole.

Soit un projectile A lancé avec la vitesse u suivant la direction Ax (fig. 5).

Au bout de t secondes il serait en a tel que $Aa = u \times t$; mais dans le même temps l'action de la pesanteur le fait tomber suivant la direction Ay d'une quantité égale à $Am = \frac{1}{2} g \times t^2$. Il est donc en B, tel que : $aB = Am$.

De même, au bout de 2 t secondes, il serait en b sur Ax si le mouvement rectiligne uniforme existait seul. Dans le même temps il est tombé d'une longueur égale à $An = \frac{1}{2} g \times 4\,t^2$ et il est en C. La figure 5 indique une construction commode des positions successives du projectile.

La trajectoire passe donc par les points A, B, C. C'est un *arc de parabole* tangent en A à la droite Ax.

Ax est la *ligne de tir*,
M est le *point de chute* ou *point d'impact*,
AM est la *portée*.

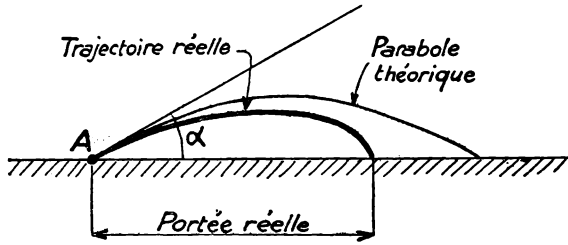


Fig. 6. La résistance de l'air modifie la parabole théorique.

REMARQUE 1. — En réalité, la résistance opposée par l'air à l'avancement du projectile est très importante. Elle réduit la hauteur et la portée (fig. 6).

REMARQUE 2. — Il est facile de réaliser matériellement une trajectoire analogue à l'aide d'un jet d'eau dont la lance est inclinée sur le plan horizontal.

III. — COMPOSITION D'UN MOUVEMENT RECTILIGNE UNIFORME ET D'UN MOUVEMENT CIRCULAIRE UNIFORME : MOUVEMENT HÉLICOÏDAL

5. Faits d'observation.

1° Faisons tourner une vis dans son écrou fixe. Nous constatons que l'un quelconque de ses points tourne et en même temps avance. Sa trajectoire est une *hélice*, son mouvement est dit *hélicoïdal*.

Le tire-bouchon que l'on enfonce, la balle de fusil qui a parcouru le canon rayé de l'arme, sont animés d'un tel mouvement.

2° Sur la pièce qui tourne entre pointes, l'extrémité A d'un outil à fileter trace une hélice, lorsque la vis mère entraîne le traînard de tour (fig. 7).

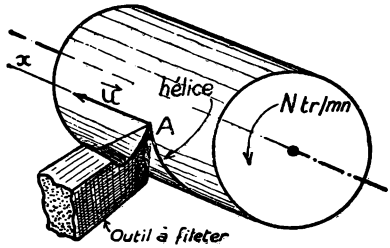


Fig. 7. — La pièce *tourne* d'un *mouvement uniforme*; l'outil est animé d'un *mouvement rectiligne uniforme* parallèle à l'axe de rotation. Le point A trace une **hélice** sur le cylindre.

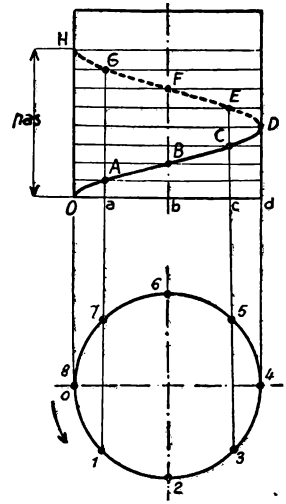


Fig. 8. — Tracé d'une *spire* d'hélice (Diviser la circonférence et le pas en 8 parties égales par exemple).

Après un tour de la pièce le point A a engendré une *spire* d'hélice, et il a avancé le long de Ax d'une longueur égale au *pas* de l'hélice.

Le mouvement rectiligne du point A et le mouvement circulaire de la pièce étant uniformes, à 1/8 de tour correspond une avance de 1/8 de pas. D'où la construction utilisée en dessin graphique pour le tracé d'une spire d'hélice (fig. 8).

Il est évident que les arcs d'hélice OA, AB, BC, ... sont égaux.

REMARQUE. — Sur la figure 8, le segment $\overline{aA}$ mesure l'*ordonnée* du point A par rapport au plan de base; l'arc de cercle $\overset{\frown}{01}$ mesure l'*abscisse curviligne* du même point comptée à partir du point zéro. On voit que *les ordonnées des différents points de l'hélice sont proportionnelles à leurs abscisses curvilignes ou encore aux angles de rotation.*

6. Mouvement hélicoïdal uniforme d'un point.

Reprenons l'exemple précédent (fig. 7). Immobilisons le cylindre par la pensée et considérons le point A de l'outil (fig. 9).

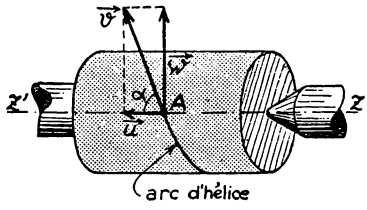


Fig. 9. — Le cylindre est immobilisé. Le point A tourne et en même temps avance parallèlement a l'axe zz'.

Pour qu'il continue à tracer la même hélice il faut :

1° *le faire tourner* autour du cylindre avec la vitesse de rotation N qu'avait celui-ci, mais en sens inverse (*mouvement relatif*) ;

2° *le faire avancer* parallèlement aux génératrices du cylindre avec la même vitesse u que précédemment (*mouvement d'entraînement*).

Le point A décrit alors des arcs d'hélice égaux en des temps égaux : son mouvement est dit *hélicoïdal uniforme.*

CONCLUSION. — *Un point est animé d'un mouvement hélicoïdal uniforme lorsqu'il décrit des arcs d'hélice égaux en des temps égaux.*

Le mouvement hélicoïdal uniforme résulte de la composition d'un mouvement circulaire uniforme et d'un mouvement rectiligne uniforme dont les vitesses linéaires sont rectangulaires.

Soient : w la vitesse linéaire du mouvement de rotation.
u la vitesse du mouvement de translation.

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont rectangulaires.

La vitesse $\vec{v}$ du mouvement résultant, représentée en M_0 par un vecteur tangent à la trajectoire, a donc pour valeur :

$$v = \sqrt{u^2 + w^2}$$

REMARQUE. — Le vecteur $\vec{v}$ fait avec le vecteur $\vec{u}$, c'est-à-dire avec les génératrices du cylindre d'axe $x'x$, un angle α tel que $\text{tg } \alpha = \frac{w}{u}$. Cet angle est constant.

Résumé.

1. Lorsqu'un point mobile participe à deux mouvements simultanés, le vecteur-vitesse du mouvement résultant est représenté en direction, sens et grandeur par une diagonale du parallélogramme des vitesses des mouvements composants.

$$\vec{v} = \vec{u} + \vec{w}$$

2. Le mouvement résultant de deux mouvements rectilignes de directions différentes, l'un uniforme, l'autre uniformément accéléré, est un mouvement parabolique *(application au mouvement des projectiles).*

3. Lorsqu'un point est animé simultanément d'un mouvement circulaire uniforme et d'un mouvement rectiligne uniforme dont les vitesses linéaires sont rectangulaires, son mouvement résultant est hélicoïdal uniforme.

Exercices.

1. On lance une bille d'acier sur une table horizontale (fig. 10). Son mouvement est uniforme de vitesse *u*. Arrivée au point A elle quitte la table et tombe en C dont la position est donnée par les distances marquées sur la figure.

Calculer :

1° la durée du mouvement de chute et la vitesse *u;*

2° sa vitesse à l'arrivée au sol et l'angle de la tangente au point d'impact avec le plan horizontal.

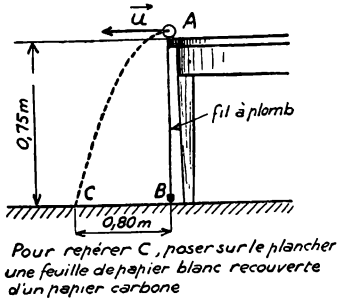


Fig. 10.

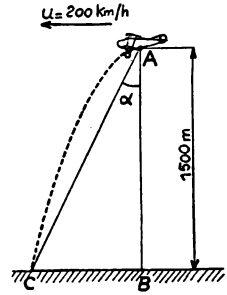


Fig. 11.

2. Un avion vole à une altitude de 1 500 mètres à la vitesse de 200 *km /h* (fig. 11).

Au point A le bombardier laisse tomber une bombe.

1° Calculer la durée de la chute du projectile.

2° De quelle distance BC a-t-il avancé en tombant?

3° En déduire la valeur de l'angle de visée α.

(On néglige la résistance de l'air sur le projectile.)

3. Machine de Morin. — Un tambour cylindrique (diamètre : 150 *mm*; hauteur : 800 *mm*) est entraîné par un moteur électrique à réducteur de vitesse.

L'axe du tambour est vertical; l'arbre repose sur un bâti rigide par des pivots coniques et il fait 2 tours par seconde.

Un poids curseur, guidé par deux fils, tombe verticalement lorsqu'on agit sur un dispositif de déclenchement. Dans sa chute il entraîne un crayon qui s'appuie légèrement sur la paroi du tambour.

1° Faire le schéma de la machine.

2° On enroule une feuille de papier sur le tambour et on enregistre la trace laissée par le crayon dans sa chute lorsque le tambour tourne. Quelle est cette trajectoire une fois la feuille déroulée et mise à plat?

3° Montrer qu'on peut, à l'aide de cet appareil, vérifier que le mouvement de chute libre d'un corps est uniformément accéléré.

4. On réalise l'expérience représentée par la figure 12. Dès que le chariot atteint le plan horizontal, *son mouvement devient rectiligne uniforme.* Au point B, une butée déclenche un ressort qui lance verticalement une bille contenue dans le canon.

Le chariot continue à avancer et la bille, après avoir décrit une certaine trajectoire, retombe dans le canon.

1° Que prouve cette expérience?

2° Quelle est la trajectoire de la bille?

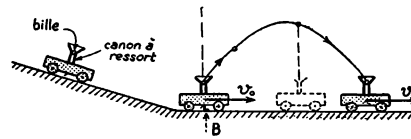


Fig. 12.

5. Un projectile est lancé du sol avec une vitesse initiale de 300 *m/s*, sous un angle de 30° avec le plan horizontal.

Au point O de départ on trace deux axes de coordonnées O*x*, O*y*, l'un horizontal l'autre vertical.

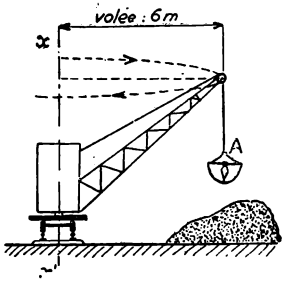


Fig. 13.

Utiliser le raisonnement du paragraphe 4 de la leçon pour déterminer les coordonnées du centre du mobile à un instant quelconque *t*.

En déduire par le calcul :

1° l'équation de la trajectoire;

2° la portée du projectile et la durée du mouvement;

3° la hauteur d'ascension;

4° la vitesse au point d'impact.

6. Nature du mouvement et vitesse du point A d'une benne qu'une grue soulève en tournant autour de l'axe *xx'* (fig. 13).

La charge monte uniformément de 5 *mètres* en 5 *secondes* et la grue fait un tour en 12 *secondes*.

7. Soient : *p* le pas d'une hélice décrite sur un cylindre de rayon R, N le nombre de tours par minute que fait un point mobile sur cette hélice. Démontrer que sa vitesse est donnée par la formule :

$$V = \frac{N}{60}\sqrt{p^2 + 4\pi^2 R^2}.$$

Calculer l'angle d'inclinaison du vecteur vitesse avec les génératrices du cylindre. (Appliquer au cas où $p = 3\ m$; $R = 0{,}40\ m$; $N = 60\ tr/mn$).

8. Etudier l'hodographe du mouvement hélicoïdal uniforme d'un point.

Cinématique du corps solide.

1. Mouvements simples des pièces de machines industrielles.

Observons la presse de la figure 1.

Un arbre portant deux plateaux peut glisser le long de son axe *xy*. Un volant V, solidaire d'une vis dont l'écrou est fixé sur le bâti, entraîne le poinçon K. La distance des plateaux est supérieure au diamètre extérieur du volant.

Lorsque l'arbre tourne, les plateaux P et P′ sont animés d'un *mouvement de rotation*.

Si le plateau P vient à toucher la jante du volant, ce dernier est entraîné par adhérence : il tourne et en même temps descend; son mouvement est *hélicoïdal*.

Le poinçon descend alors verticalement d'un *mouvement de translation*. Pour le remonter, il faut appliquer le plateau P′ sur la jante du volant.

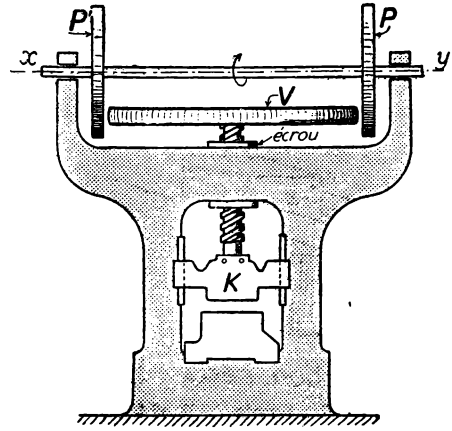


Fig. 1. — Voici une *presse à balancier*. Définissez le mouvement de chacune des parties mobiles.

Les mouvements de translation, de rotation et le mouvement hélicoïdal s'observent sur beaucoup de machines industrielles.

2. Le mouvement d'un corps solide est déterminé à tout instant si l'on connaît la position de trois de ses points non en ligne droite.

Le mouvement d'un corps solide est déterminé si l'on peut marquer la position de chacun de ses points à chaque instant.

Rappelons qu'un corps solide peut être considéré comme formé d'une multitude de points matériels dont les distances mutuelles sont invariables, d'où le nom de *système invariable* sous lequel on désigne souvent un corps solide.

Soient M, N, P trois points d'un solide. Tout autre point A définit

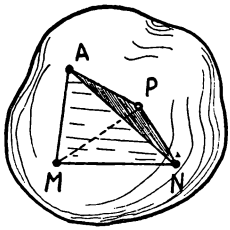


Fig. 2. — Le mouvement d'un corps est déterminé si l'on connaît, à tout instant, la position de trois de ses points M, N, P, *non en ligne droite.*

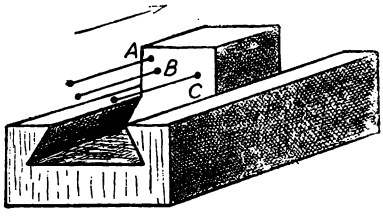
avec les précédents, une pyramide triangulaire AMNP (fig. 2). A toute position de la base MNP correspond *une position unique* du sommet A. Par suite, il suffit de connaître à chaque instant la position des trois points M, N, P, *non en ligne droite*, pour que la position de tout autre point du solide soit déterminée sans ambiguïté.

L'étude du mouvement d'un corps solide se rattache donc à celle du mouvement du point.

I. — MOUVEMENT DE TRANSLATION

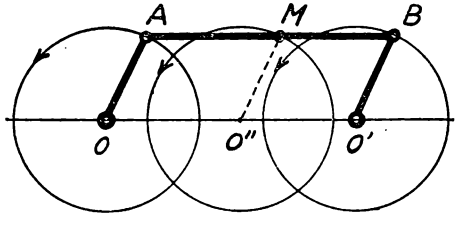
3. Définition du mouvement de translation.

1° Observons le coulisseau de la figure 3. Lors-



Translation rectiligne

Fig. 3. — Les points A, B et C du coulisseau décrivent des segments de droite parallèles et égaux.



Translation circulaire

Fig. 4. — Montrez que tout point de la barre AB décrit un cercle de rayon égal à OA.

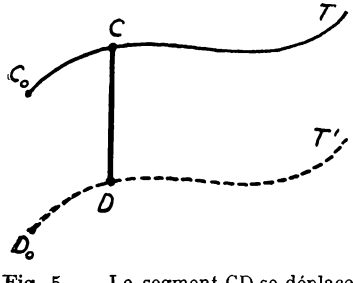


Fig. 5. — Le segment CD se déplace parallèlement à lui-même. Tous ses points décrivent des trajectoires égales et parallèles. Le mouvement est une **translation quelconque**.

qu'il se déplace dans sa glissière, ses différents points décrivent, dans le même temps, des segments de droites parallèles et égaux : il est animé d'un *mouvement de translation rectiligne.*

2° Considérons le dispositif de la figure 4. La bielle AB, supposée réduite à une droite, est articulée sur les manetons de deux manivelles de même rayon, dont les axes de rotation O et O′ sont tels que : OO′ = AB.

Lorsque la manivelle OA tourne, les points A et B décrivent des circonférences égales de centres O et O′. Tout point M de AB décrit une circonférence

égale aux précédentes, car si l'on prend sur OO′ un point tel que OO″ = AM, on voit que O″M = OA = OB = constante.

La bielle AB est animée d'un *mouvement de translation circulaire.*

3° Soit un *segment de droite CD qui se déplace parallèlement à lui-même.* Le point C décrit une trajectoire quelconque T (fig. 5). Le point D décrit une trajectoire T′ qui est parallèle et égale à la trajectoire T. La droite CD est animée d'un *mouvement de translation quelconque.*

D'une manière générale, ***un solide est animé d'un mouvement de translation lorsque tous ses points décrivent des trajectoires égales et parallèles.***

REMARQUE. — Il suffit que trois points du corps, non en ligne droite, décrivent des trajectoires égales et parallèles pour que son mouvement soit une translation.

4. Le mouvement de translation d'un corps solide est déterminé si l'on connaît le mouvement d'un seul de ses points.

En effet, supposons connues la trajectoire T et la loi du mouvement d'un point M. Le mouvement étant de translation, toute droite joi-

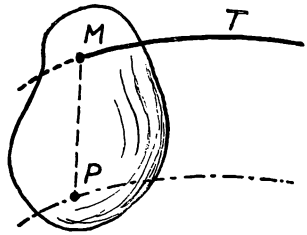


Fig. 6. — Le corps est animé d'un mouvement de translation. La trajectoire du point P se déduit de celle du point M par une translation rectiligne mesurée par le vecteur $\overrightarrow{MP}$.

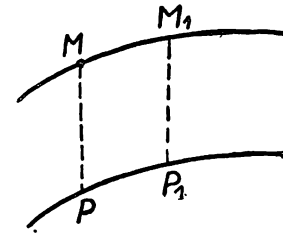


Fig. 7. — Dans un mouvement de translation deux points quelconques ont, au même instant, parcouru le même espace. Pourquoi?

gnant deux points quelconques du corps se déplace parallèlement à elle-même.

1° *La trajectoire d'un point quelconque P* se déduit donc de la trajectoire T par une translation mesurée par le vecteur $\overrightarrow{MP}$.

2° *L'espace parcouru à l'instant* t *par le point P* est égal à l'espace parcouru au même instant par le point M (fig. 7).

On a, en effet :

$$\overset{\frown}{MM_1} = \overset{\frown}{PP_1}$$

puisque les trajectoires sont égales et parallèles.

3° *La vitesse à l'instant* t *du point P* est équipollente à la vitesse du point M au même instant, car M_1 et M_2, P_1 et P_2 étant des positions voisines aux instants voisins t et $t + \Delta t$ on a :

$$\overset{\frown}{M_1 M_2} = \overset{\frown}{P_1 P_2} \qquad \text{(fig. 8)}$$

et les vitesses moyennes dans l'intervalle de temps Δt sont égales :

$$\frac{\overset{\frown}{M_1 M_2}}{\Delta t} = \frac{\overset{\frown}{P_1 P_2}}{\Delta t}$$

Lorsque Δt tend vers zéro, ces deux rapports égaux tendent vers la vitesse à l'instant t aux points M_1 et P_1. Les deux vecteurs vitesses sont

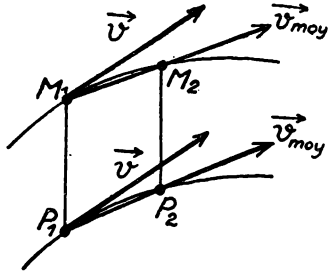


Fig. 8. — Dans un mouvement de translation, tous les points du corps mobile ont, au même instant, la même vitesse.

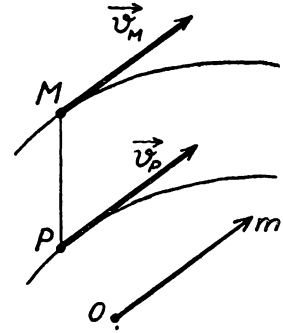


Fig. 9. — Dans un mouvement de translation tous les points du corps solide ont, au même instant, la même accélération (même hodographe).

équipollents, car aussi près que soient de M_1 et P_1 les points M_2 et P_2, la figure $M_1 M_2 P_2 P_1$ demeure un parallélogramme.

4° *L'accélération à l'instant* t *du point P* est égale à l'accélération du point M. En effet, si d'un point quelconque O on mène des vecteurs équipollents aux vecteurs vitesses des points M et P, on obtient pour ces deux points le même hodographe (fig. 9).

Remarque. — En langage courant, le mot *translation* désigne le plus souvent une translation rectiligne.

II. — MOUVEMENT DE ROTATION

Considérons un volant monté sur pivots coniques (fig. 10). Les points d'appui A et B sont fixes.

Par rapport au bâti, le seul mouvement possible est une rotation autour de la droite AB appelée *axe de rotation*. Donc :

Pour qu'un corps puisse prendre un mouvement de rotation il suffit que deux de ses points A et B soient fixes.

Il en résulte que tous les points de l'axe de rotation AB sont fixes.

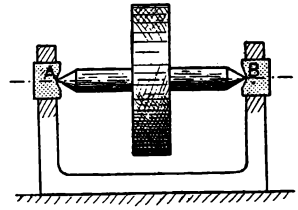


Fig. 10. — Pour qu'un corps solide puisse prendre un mouvement de rotation, il suffit que deux de ses points, A et B, soient fixes.

5. Dans un mouvement de rotation, tous les points du corps non situés sur l'axe décrivent des circonférences.

Soit N un point quelconque pris en dehors de l'axe $x'x$ (fig. 11). Menons NO perpendiculaire sur $x'x$.

Pendant la rotation, le segment ON engendre un plan perpendiculaire en O à $x'x$; le point N décrit, dans ce plan, une circonférence de rayon ON.

6. Dans un mouvement de rotation, tous les points du corps ont, au même instant, la même vitesse angulaire.

Il est évident que tout point du corps situé sur ON a même vitesse angulaire que le point N (fig. 11).

Soit M un autre point. Menons MO' perpendiculaire sur $x'x$. La figure NOO'M est *invariable* à l'intérieur du corps solide. Par suite, le rayon O'M tourne avec la même vitesse que le rayon ON : le point M a donc même vitesse angulaire que le point N.

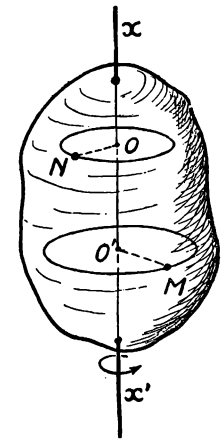


Fig. 11. — Dans un mouvement de rotation tous les points du corps décrivent des circonférences et ont, à tout instant, même vitesse angulaire.

REMARQUE. — Quand on veut préciser le mouvement d'un corps en rotation uniforme, on donne toujours sa vitesse angulaire en *nombre de tours par minute* dans le langage courant, en *radians par seconde* dans les calculs.

Ainsi nous dirons qu'un moteur électrique tourne à raison de 3 000 *tr/mn*. Sa vitesse angulaire en radians par seconde est :

$$\omega = 2 \times 3{,}14 \times 50 = 314 \text{ r/s.}$$

7. Les vitesses linéaires des différents points du corps sont proportionnelles aux rayons des circonférences qu'ils décrivent.

Soit ω la vitesse angulaire, exprimée en radians par seconde, commune à tous les points du corps (fig. 12).

La vitesse linéaire d'un point M situé à la distance R de l'axe de rotation est : $v = \omega R$.

Celle du point N situé à la distance R' est : $v' = \omega R'$.

D'où : $$\frac{v}{v'} = \frac{R}{R'}$$

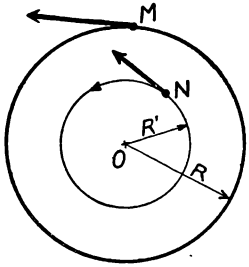


Fig. 12. — Les vitesses linéaires des points M et N sont proportionnelles aux rayons de trajectoires.

EXEMPLE NUMÉRIQUE. — *La vitesse linéaire du point M situé à 0,40 m de l'axe de rotation est* v = 1,50 *m/s. Calculer la vitesse* v' *du point N situé à* 0,25 *m du même axe.*

Nous savons que $\frac{v}{v'} = \frac{R}{R'}$

d'où :

$$v' = v \times \frac{R'}{R} = \frac{1,5 \times 0,25}{0,40} \simeq \mathbf{0,94\ m/s}$$

8. La vitesse angulaire peut être représentée par un vecteur.

Imaginons qu'un observateur soit placé le long de l'axe *xy*, bras étendus (fig. 13).

Par définition, *le mobile tourne dans le sens positif* lorsque l'observateur voit les différents points du solide se déplacer de sa droite vers sa gauche. Dans le cas contraire, le *sens de rotation est négatif*.

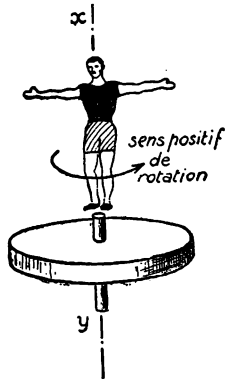


Fig. 13. — Ce disque tourne, pour cet observateur, dans le sens positif.

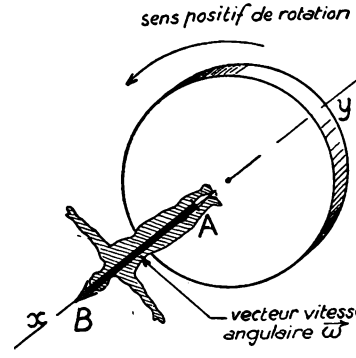


Fig. 14. — Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ ou *vecteur-rotation* $\vec{\omega}$ définit le sens et la grandeur de la vitesse angulaire de la meule.

Soit $\omega = 6\ r/s$ la valeur numérique de la vitesse angulaire d'une meule d'axe *xy* (fig. 14).

Portons sur xy un vecteur $\vec{\omega}$ défini de la manière suivante :

1° Son *origine* A est un point quelconque de xy;

2° *son sens* est celui qui va des pieds à la tête d'un observateur qui, placé le long de xy, voit tourner la meule dans le sens positif;

3° sa *longueur* est proportionnelle à la valeur numérique donnée (par exemple, l'échelle sera de 1 centimètre pour 1 radian par seconde).

Le vecteur $\vec{\omega}$ définit à la fois le sens de rotation et la grandeur de la vitesse angulaire : il caractérise donc complètement le mouvement du solide. On l'appelle *vecteur-rotation*.

III. — MOUVEMENT HÉLICOÏDAL

Considérons l'appareil de la figure 15. Une hélice est matérialisée par le bord d'une plaque de tôle enroulée suivant un cylindre d'axe xy.

Un corps solide de forme quelconque peut *glisser* et *tourner* librement sur cet axe. L'un de ses points, A, repose sur l'hélice.

Lorsqu'on déplace le point A sur l'hélice, le mouvement du corps est dit *hélicoïdal*.

Pour que le mouvement d'un corps soit hélicoïdal, il suffit donc que deux de ses points glissent sur l'axe d'un cylindre et qu'un troisième point, A, décrive une hélice tracée sur ce cylindre.

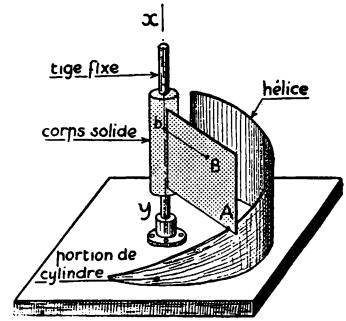


Fig. 15. — Pour que le mouvement d'un corps soit *hélicoïdal*, il suffit que deux de ses points glissent sur l'axe xy d'un cylindre et qu'un troisième point, A, décrive une hélice tracée sur ce cylindre.

9. Sens du mouvement hélicoïdal.

Plaçons sur l'axe xy un observateur orienté de telle sorte que *le sens des pieds à la tête soit celui suivant lequel avance le corps solide* (fig. 16).

Si le point A tourne, pour cet observateur, dans le sens positif, le mouvement hélicoïdal est dit *à droite* ou *dextrorsum*. C'est ce qui a lieu ordinairement dans les vis et les écrous.

Si le point A tourne dans le sens négatif, le mouvement est dit *à gauche* ou *sinistrorsum*.

10. Dans un mouvement hélicoïdal, tous les points du corps décrivent des hélices de même pas.

Tout point B du solide se déplace évidemment sur un cylindre d'axe xy et de rayon Bb (fig. 15).

Or B est invariablement lié au point A; il décrit donc, comme lui,

parallèlement à xy, des espaces proportionnels aux angles de rotation. *Sa trajectoire est donc une hélice.*

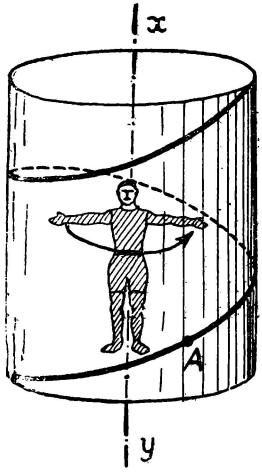


Fig. 16. — L'hélice décrite par le point A est ici une hélice *à droite.*

Cette hélice a même pas que celle décrite par le point A, car après une révolution complète, les deux points ont avancé suivant xy de la même longueur. Seuls, les rayons sont différents.

11. Dans un mouvement hélicoïdal, tous les points du corps ont même vitesse angulaire et même vitesse de translation à tout instant.

A tout instant, le mouvement du point A résulte :

1° d'*un mouvement de rotation* autour de xy (fig. 15);

2° d'*un mouvement de translation* parallèle à xy.

Or, tous les points du corps solide sont invariablement liés au point A : ils ont donc, à tout instant, même vitesse angulaire ω et même vitesse de translation u.

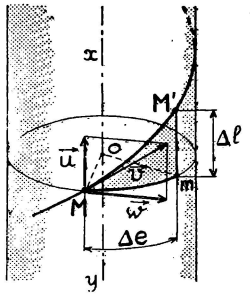


Fig. 17. — Montrez que dans le mouvement hélicoïdal la vitesse de translation est proportionnelle à la vitesse de rotation.

12. Vitesse d'un point quelconque à un instant donné.

Soient : M la position d'un point du corps à l'instant t.

M' sa position à l'instant t' très voisin de t (fig. 17).

Posons $t' - t = \Delta t$. Dans cet intervalle de temps le rayon OM a tourné d'un arc Δe et le point M s'est élevé parallèlement à xy d'une longueur Δl.

Appelons w_{moy} et u_{moy} les vitesses moyennes de rotation et de translation dans l'intervalle de temps Δt :

$$w_{moy} = \frac{\Delta e}{\Delta t} \qquad u_{moy} = \frac{\Delta l}{\Delta t}$$

Le point M décrit une hélice : les ordonnées sont donc proportionnelles aux abscisses curvilignes :

$$\frac{\Delta l}{\Delta e} = \frac{\text{pas de l'hélice}}{\text{long}^{r} \text{ de la circonférence}} = \frac{p}{2\pi R}$$

D'où : $$\frac{u_{moy}}{w_{moy}} = \frac{\Delta l}{\Delta e} = \frac{p}{2\pi R}$$

Lorsque Δt tend vers 0, les vitesses moyennes u_{moy} et w_{moy} tendent vers les vitesses u et w à l'instant t et :

$$\frac{u}{w} = \frac{p}{2\pi R} = \textit{constante.}$$

Or $w = \omega R$; par suite : $u = \omega \times \frac{p}{2\pi}$.

On voit *qu'à tout instant, la vitesse angulaire d'un point M et sa vitesse de translation sont directement proportionnelles.*

La vitesse résultante v du point M est donc :

$$v = \sqrt{u^2 + w^2} = \sqrt{\omega^2 \times \frac{p^2}{4\pi^2} + \omega^2 R^2}$$

$$\text{soit : } v = \frac{\omega}{2\pi}\sqrt{p^2 + 4\pi^2 R^2}$$

EXEMPLE NUMÉRIQUE. — *Une vis de pas* p = 6 *mm tourne à la vitesse constante de* 90 *tr/mn dans son écrou fixe. Son diamètre est de* 30 *mm. Calculer la vitesse d'un point de sa périphérie.*

Prenons comme unités la *seconde* et le *millimètre*.

Ici : $\omega = \frac{\pi N}{30}$ d'où $\frac{\omega}{2\pi} = \frac{N}{60} = \frac{90}{60} = 1{,}5$

$p = 6$; $p^2 = 36$

$R = 15$; $R^2 = 225$

D'où $v = 1{,}5\sqrt{36 + 8\,883} \simeq 142$ *mm/s*

Résumé.

1. L'étude du mouvement d'un corps solide se rattache à l'étude du mouvement d'un point.

2. Dans un mouvement de translation, tous les points d'un corps solide :
a) décrivent des trajectoires égales et parallèles,
b) parcourent des espaces égaux en des temps égaux,
c) ont à chaque instant la même vitesse et la même accélération.

3. Tous les points d'un corps en rotation autour d'un axe ont, à chaque instant, la même vitesse de rotation et la même vitesse angulaire.
Les vitesses linéaires de deux points quelconques sont entre elles comme leurs distances à l'axe de rotation :

$$\frac{v}{v'} = \frac{R}{R'}$$

4. Dans un mouvement hélicoïdal, tous les points du corps ont, à chaque instant, même vitesse angulaire et même vitesse de translation. La vitesse résultante d'un point quelconque est :

$$v = \frac{\omega}{2\pi}\sqrt{p^2 + 4\pi^2 R^2}.$$

ω : vitesse angulaire.
p : pas de l'hélice
R : distance du point à l'axe de rotation.

Exercices.

1. Reconnaître sur un tour, une fraiseuse, une perceuse, la nature du mouvement des différents organes. Dresser un tableau des observations qui ont été faites.

2. Les diamètres d'une poulie étagée de tour sont respectivement 90, 160 et 230 *mm*. La vitesse linéaire d'un point de la périphérie du plus petit étage étant de 1,40 *m/s*, calculer les vitesses linéaires à la périphérie des autres étages.

3. Une hélice de 3, 20 *m* de diamètre imprime à un avion une vitesse de translation de 180 *km/h*. Sachant que sa vitesse de rotation est de 1 500 *tr/mn*, définir la nature de son mouvement par rapport au sol et calculer en *m/s* la vitesse d'un point situé à 0,90 *m* de l'axe de rotation.

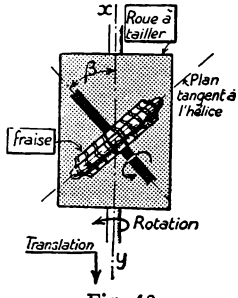


Fig. 18.

4. La figure 18 représente une fraise taillant un engrenage à denture hélicoïdale. Le plan médian de l'outil est tangent à l'hélice de la denture.

Le mouvement de la roue à tailler résulte :

a) d'un mouvement de rotation uniforme autour de son axe *xy ;*

b) d'un mouvement de translation uniforme parallèle à cet axe.

Les données sont les suivantes :

diamètre de la roue à tailler : 60 *mm ; pas de l'hélice :* 120 *mm ;*

vitesse d'avance de la table qui donne le mouvement de translation : 40 *mm/mn ;*

diamètre de la fraise à profil constant : 65 *mm ; vitesse de coupe :* 14 *m/mn.*

1° Quel est l'angle α dont il faut incliner la fraise ?

2° Quelle doit être la vitesse de rotation de la roue à tailler ?

3° Quelle est la vitesse de rotation de la fraise ?

Note sur la mesure de la vitesse et de l'accélération.

I — APPAREILS DE MESURE DE LA VITESSE

Dans les divers domaines de la technique, la *mesure de la vitesse* d'un mobile offre un grand intérêt. Elle permet d'exercer un contrôle et, par suite, d'établir les meilleures conditions de fonctionnement et de sécurité des organes de machines.

Les appareils utilisés portent le nom de TACHYMÈTRES[1]. Pratiquement, ils permettent, par lecture directe, de mesurer :

a) une *vitesse de rotation* en nombre de tours par minute,

b) une *vitesse linéaire* en mètres par minute ou en kilomètres par heure.

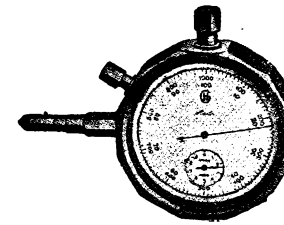


Fig. 1. — Indicateur de vitesse *Hasler*.

1. Différents types de tachymètres.

Nous distinguerons :

1° ***Les tachymètres portatifs*** dont le type est le *tachymètre Hasler* (fig. 1).

L'axe de l'appareil est placé en bout d'arbre et *tourne fou* tant que le mécanisme n'est pas embrayé (fig. 2). L'*embrayage* est *commandé* à volonté par un bouton

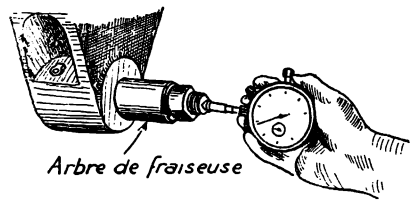


Fig. 2. — Mesure de la *vitesse de rotation* d'un arbre de fraiseuse.

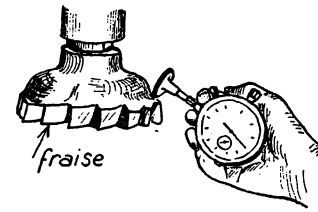


Fig. 3. — Mesure de la *vitesse linéaire* d'une fraise (vitesse de coupe).

qu'on appuie et qu'on relâche aussitôt. Après trois secondes de fonctionnement la mesure est terminée et le mécanisme est *débrayé automatiquement*. Il suffit de lire le nombre en face duquel s'est arrêtée l'aiguille indicatrice.

1. Du grec *takhus* : rapide et *métron* : mesure.

L'appareil, équipé avec une roue caoutchoutée, permet d'évaluer la vitesse linéaire en *m/mn :* vitesse de coupe d'une fraise, par exemple (fig. 3).

Ordre de grandeur de la vitesse de rotation de quelques machines :

Machines à vapeur	60 à	300	*tr/mn*
Moteur à explosions	2 000 à	6 000	—
Turbines à vapeur	1 500 à	10 000	—
Turbines hydrauliques	375 à	750	—
Alternateurs et moteurs électriques	300 à	3 000	—
Roue de compas gyroscopique		12 000	—

(à 40.000 *tr/mn* cette roue éclate).

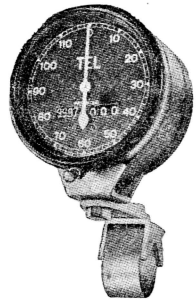


Fig. 4. — Indicateur de vitesse pour motocyclette (graduations en *km/h*).

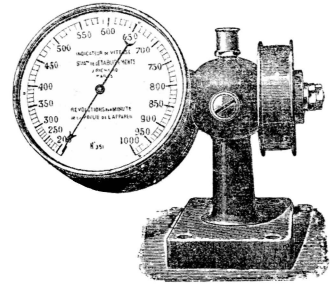


Fig. 5. — Indicateur de vitesse à aiguille stationnaire (graduation en *tr/mn*).

2° ***Les tachymètres à poste fixe.***

Ces appareils sont employés pour le contrôle permanent :

a) de la vitesse de rotation des machines à vapeur, des turbines, des moteurs d'avions, etc... (fig. 4):

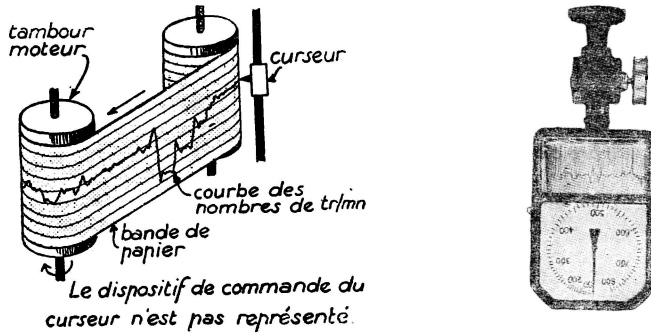


Fig. 6. — Schéma de principe et aspect réel d'un *tachygraphe* (graduation en nombre de *tr/mn*).

b) de la vitesse linéaire de volants, poulies, machines à papier, véhicules divers (fig. 5).

On les fixe à demeure sur le bâti de la machine à contrôler.

3° ***Les tachymètres enregistreurs ou tachygraphes.***

Dans un tachygraphe, une pointe commandée par un mécanisme solidaire du corps mobile se déplace verticalement sur une bande de papier (fig. 6). Celle-ci se déroule uniformément devant la pointe qui trace directement la *courbe des vitesses en fonction du temps.*

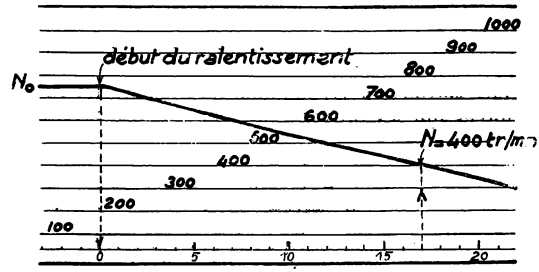


Fig. 7. — *Diagramme de ralentissement* d'un alternateur qui cesse d'être entraîné.

Selon le mode d'étalonnage de l'appareil, on obtient deux sortes de diagrammes :

a) diagrammes indiquant des *vitesses de rotation*, généralement *en nombre de tours par minute* (fig. 7),

b) diagrammes indiquant des *vitesses linéaires*, le plus souvent en *kilomètres par heure* (fig. 8).

2. Lecture de diagrammes des vitesses.

La figure 7 représente un fragment de la courbe de ralentissement d'un alternateur qui, accouplé à un moteur cesse d'être entraîné.

L'axe des temps est gradué en *secondes*. Les vitesses de rotation sont portées en ordonnées. Nous lisons :

1° au moment où l'alternateur cesse d'être entraîné, sa vitesse de rotation est

$N_o = 750$ *tr /mn*;

2° la vitesse va décroissant;

3° au bout de la 17e *seconde* de ralentissement, la vitesse de rotation a pour valeur :

$N = 400$ *tr /mn*.

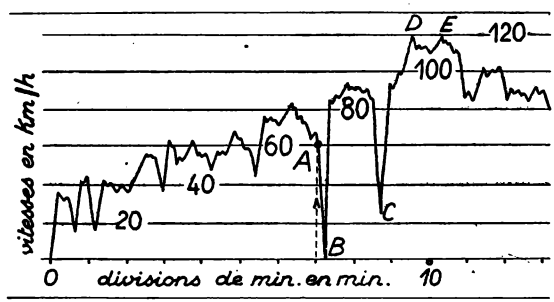


Fig. 8. — Diagramme des vitesses d'une automobile, enregistré à l'aide d'un tachygraphe TEL.

La figure 8 représente un fragment du diagramme des vitesses d'une voiture automobile lors de l'essai d'un type de série.

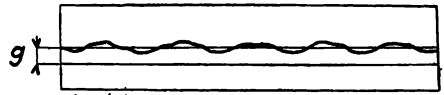
A la partie AB correspond une période de ralentissement, puis, à partir de B, la vitesse croît très rapidement pour se maintenir sensiblement à 90 *km /h.*

Les points D et E caractérisent des *pointes* de vitesse.

REMARQUE. — L'emploi des tachygraphes sur les machines ou les véhicules permet d'en contrôler le fonctionnement. En particulier, pour les chemins de fer et les camions de transports routiers, le diagramme des vitesses donne de précieuses indications sur la marche du véhicule, les incidents de route, la vigilance du conducteur.

II. — MESURE DES ACCÉLÉRATIONS

Nous verrons en Dynamique qu'il existe un rapport entre les accélérations et les forces qui les provoquent. Dans le cas où ces forces ne sont pas mesurables



Accélérations verticales provoquées par la marche d'un homme

Fig. 9.

directement, la connaissance des accélérations permet de les évaluer : d'où l'importance de la mesure des accélérations.

Les *accéléromètres* sont les appareils qui mesurent les accélérations. Lorsqu'ils sont munis d'un dispositif enregistreur, ils forment les *accélérographes*.

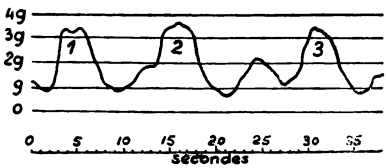


Fig. 10. — Voici comment varie l'accélération d'un avion au cours de trois loopings successifs.

Sans entrer dans le détail de leurs principes ou de leur construction, lisons quelques diagrammes [1].

La figure 9 représente un diagramme des accélérations verticales provoquées par la marche d'un homme. La distance qui sépare les deux traits horizontaux est proportionnelle à *g* (accélération de la pesanteur). On voit que l'accélération verticale est tantôt *supérieure* à *g (mouvement de montée)*, tantôt *inférieure* à *g (mouvement de descente)*.

La figure 10 n'est autre que le diagramme des accélérations verticales d'un avion d'acrobatie, enregistrées au cours de trois loopings successifs (1-2-3 sur la figure), on voit que l'accélération atteint 3,5 fois *g*, c'est-à-dire sensiblement 35 *m/s/s* au cours du deuxième looping.

1. Diagrammes empruntés à l'ouvrage : *Le vol des oiseaux et le vol des avions* du Dr A. Magnan (Gauthiers-Villars, édit.).

LECTURE. — La stroboscopie.

Certains mouvements périodiques *ont une* fréquence *trop grande pour qu'on puisse les suivre des yeux et les observer.*

Imaginons que l'objet dont on étudie le mouvement soit placé dans une pièce obscure. Éclairons-le brièvement chaque fois qu'il se trouve au même point de l'espace, dans la même phase de son mouvement. La fréquence des éclairs est alors égale à la fréquence du mouvement.

Si les éclairs se succèdent assez rapidement, les images sur la rétine s'enchaînent grâce à la persistance des impressions lumineuses, et l'objet paraît immobile. *C'est le principe de la* **stroboscopie** [1].

Si l'on fait varier de très peu la période des éclairs, le mouvement paraît avoir lieu au ralenti. *D'où l'intérêt de la méthode stroboscopique pour l'analyse et le contrôle du fonctionnement de certains organes de machines animés d'une grande vitesse.*

En France, les frères Seguin ont mis au point un stroboscope industriel, *à très grand pouvoir éclairant, qui permet d'observer et de photographier avec une grande netteté les mobiles les plus variés : hélices d'avions, soupapes, ressorts, vilebrequins, turbines, courroies, moteurs asynchrones* (glissement), *bâtis de machines* (vibrations), etc.

La méthode stroboscopique est particulièrement intéressante pour les mesures de vitesses à distance et sans aucun contact avec les mobiles. *En particulier, dans les filatures, les broches atteignent des vitesses de* 10 *à* 11 000 tr /mn. *L'emploi du compte-tours n'est pas pratique, car en l'appuyant sur la tête du fuseau on freine celui-ci. Grâce au stroboscope dont on règle la période des éclairs jusqu'à ce que la broche paraisse immobile, on mesure exactement la vitesse de rotation.*

1. Du grec *strobos :* tournoiement et *skopein :* observer.

2. STATIQUE

17e LEÇON

Notion de force. Représentation vectorielle d'une force.

1. La notion de force nous est donnée par le sens musculaire.

1° Un lourd wagonnet repose sur une voie horizontale. Tirons-le : il *démarre* lentement. Continuons notre effort : le mouvement s'*accélère*.

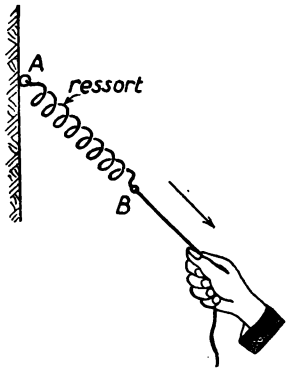


Fig. 1. — En tirant sur l'extrémité libre du ressort on exerce une **force.** Le ressort s'allonge.

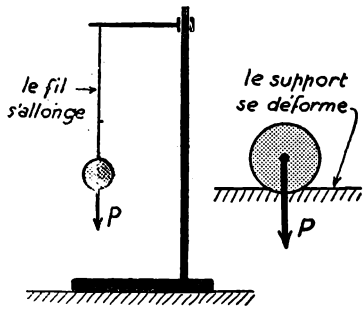


Fig. 2. — Sous l'effet du poids, il y a déformation du fil ou du support.

Cessons de le tirer et exerçons une poussée de sens opposé au mouvement : le wagonnet *ralentit*, puis sa vitesse s'annule.

Notre effort musculaire a eu pour effet de *modifier la vitesse* du wagonnet.

2° Tirons sur l'extrémité libre d'un ressort dont l'autre extrémité

est fixée à un crochet scellé dans le mur (fig. 1). Le ressort s'allonge, puis reste immobile. Notre effort musculaire n'a provoqué qu'une *déformation*.

DÉFINITION. — ***On appelle force toute cause capable de modifier la vitesse d'un corps ou de provoquer sa déformation.***

2. Exemples de forces. Leurs effets sont dynamiques ou statiques.

Il suffit de regarder autour de soi pour constater les effets de nombreuses forces.

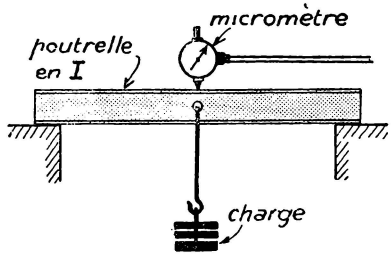


Fig. 3. — Grâce au *micromètre*, on peut observer le fléchissement de la poutre sous l'action de la charge appliquée en son centre.

Le *vent* produit des forces capables d'actionner les ailes d'un moulin, de faire mouvoir un bateau.

La *poussée de la vapeur* sur le piston d'une machine le met en mouvement. Celle de l'*air comprimé* anime des moteurs, des marteaux pneumatiques, des riveuses.

La *force magnétique* d'un aimant attire un morceau de fer.

Le *poids d'un corps est une force verticale*, qui le fait tomber vers la terre, lorsqu'on l'abandonne à lui-même.

D'une manière générale, lorsqu'une force modifie la vitesse d'un corps, on dit que son effet est ***dynamique***. Dans le cas où le corps demeure au repos et où la force ne détermine que des déformations, son effet est dit ***statique***. Ainsi le poids d'un corps suspendu à un fil ou posé sur une table déforme son support. L'effet du poids est statique (fig. 2).

REMARQUE. — La déformation, souvent, n'est pas visible à l'œil nu. On peut alors la déceler à l'aide de dispositifs amplificateurs : un micromètre comparateur, par exemple (fig. 3).

3. Point d'application d'une force.

1° La poussée de la vapeur sur le piston d'une machine à vapeur est

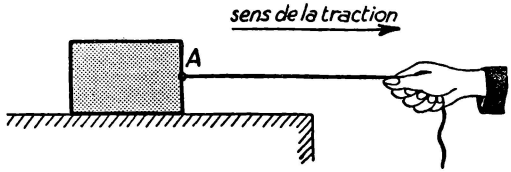


Fig. 4. — Le point A est le **point d'application** de la force; la ficelle tendue définit sa **droite d'action**; **son sens** est ici de gauche à droite.

répartie sur toute la surface du piston. Cette force est dite *pressante.*

2° Tirons sur un lopin de fonte à l'aide d'une cordelette attachée en A (fig. 4). Ici, l'action de la force est localisée sur une petite surface qu'on peut assimiler à un point; ce point A est dit ***point d'application*** de la force de traction.

Jusqu'à nouvel ordre nous ne nous occuperons pas des forces pressantes, mais seulement des forces ayant un point d'application.

4. Droite d'action et sens d'une force.

Reprenons l'exemple de la figure 4. La cordelette tendue définit une droite qu'on appelle ***droite d'action*** de la force de traction.

Le ***sens*** de cette force est celui dans lequel se déplacerait le point d'application sous la seule action de cette force.

5. Intensité d'une force.

Une force est une grandeur mesurable.

1° Nous pouvons tirer *plus ou moins fort* sur la corde attachée au crochet qui est scellé dans un mur.

Une force peut donc diminuer ou augmenter : *c'est une grandeur.*

2° *C'est une grandeur mesurable.*

Rappelons que pour mesurer une grandeur on la compare à une autre de *même espèce* choisie comme *unité.* L'opération consiste à *ajouter* plusieurs fois à elle-même cette unité (ou des fractions de cette unité), jusqu'à ce que l'on trouve une grandeur *égale* à la grandeur à mesurer. (*Exemple:* mesure de la longueur d'une salle).

La mesure d'une grandeur repose donc sur la définition de *l'égalité* et de *la somme* de grandeurs de cette espèce.

1. Définition de l'égalité. — *Deux forces sont égales si, dans les mêmes conditions, elles produisent les mêmes effets.*

L'expérience montre que si deux forces produisent un même effet — la même déformation d'un corps élastique, par exemple — elles produisent toujours les mêmes effets, statiques ou dynamiques.

Il suffit donc de vérifier, par un procédé quelconque, que deux forces produisent un même effet, pour qu'on puisse affirmer qu'elles sont égales.

2. Définition de l'addition. — Nous admettrons que *lorsque deux forces, ayant même droite d'action et même sens, sont appliquées simultanément au même point, il existe une force unique, de même direction et de même sens, qui produit le même effet que ces deux forces réunies. Cette force unique s'appelle la somme des deux forces données.*

Dans ces conditions, ***l'intensité d'une force est le nombre qui la mesure avec une unité choisie une fois pour toutes.***

6. Mesure des forces.

1° ***Unités de force.*** — L'*unité pratique* de force est le ***kilogramme-poids (symbole : kgp)***. C'est le poids, à Paris, d'un certain cylindre de

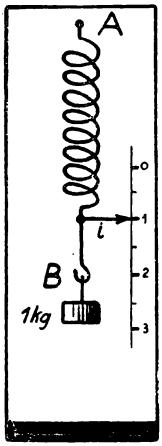


Fig. 5. — Etalonnage d'un ressort fixé sur une planchette. Comment procède-t-on?

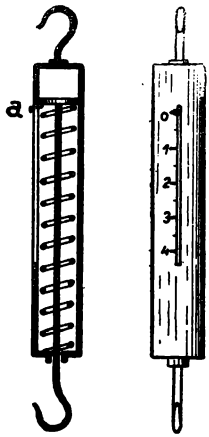


Fig. 6. — **Peson à ressort.** Le ressort s'aplatit lorsqu'un crochet étant fixe, on tire sur l'autre. Le piston entraîne un index **a** qui permet de lire la grandeur de la force appliquée.

platine, conservé au pavillon international des Poids et Mesures (à Sèvres).

Les multiples et sous-multiples les plus employés sont la ***tonne-poids*** *(symbole : **tp**)* et le ***gramme-poids*** *(symbole : **gp**)*.

L'*unité légale* de force est le ***sthène*** *(symbole : **sn**)*. Nous reviendrons plus tard sur sa définition et nous démontrerons que :

1 sthène = 102 kgp

2° ***Mesure des poids.*** — Les poids sont des forces verticales dirigées de haut en bas. On les mesure habituellement avec des balances ou des bascules. On peut aussi les mesurer avec des appareils à ressort.

Soit, par exemple, un ressort à boudin monté sur une planchette comme l'indique la figure 5. En face de l'index, marquons zéro.

Suspendons un poids de 1 *kgp* au crochet. Le ressort s'allonge. Marquons 1 en face de la nouvelle position de l'index.

Suspendons deux poids de 1 *kgp*. Le ressort s'allonge davantage. Marquons 2 en face de l'index.

On peut ainsi continuer la graduation mais l'opération est limitée : *il faut prendre soin de ne pas trop allonger le ressort.* Ce dernier doit en effet reprendre sa longueur primitive lorsqu'on supprime les poids : *la déformation doit être élastique* [1].

Il est évident qu'on peut compléter la graduation entre 0 et 1, 1 et 2, 2 et 3..., en accrochant des poids de valeurs intermédiaires [(0 + 0,1) *kgp;* (0 + 0,2) *kgp;* (0 + 0,3) *kgp;*... (1 + 0,1) *kgp;* (1 + 0,2) *kgp;* (1 + 0,3) *kgp;* etc.].

L'appareil ainsi gradué est un ***dynamomètre.*** Celui de la figure 6 ou *peson à ressort* en est une variante, d'emploi plus commode.

Pour mesurer le poids inconnu d'un corps il

1. D'une manière générale un CORPS ÉLASTIQUE est un corps qui se déforme sous l'influence des forces qui agissent sur lui, mais qui reprend son état primitif dès qu'on supprime ces forces. Toutefois, *si la déformation est trop grande,* le corps ne revient pas exactement à sa forme primitive quand la force cesse d'agir; *l'élasticité d'un corps a donc une limite.*
Nous supposerons dans ce qui suit que cette limite n'est jamais atteinte.

suffit de le suspendre au crochet et de lire le nombre devant lequel s'arrête l'index.

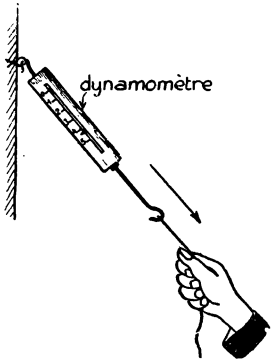


Fig. 7. — Mesure de l'**intensité** d'une force à l'aide du peson à ressort.

3° ***Mesure d'une force quelconque.*** — Pour mesurer une force quelconque, nous l'appliquerons au crochet du dynamomètre dans les conditions observées pour l'étalonnage (fig. 7). Si l'index s'arrête en face de la division 4,3, la force considérée produit la même déformation qu'un poids de 4,3 *kgp* : son intensité est de 4,3 *kgp*.

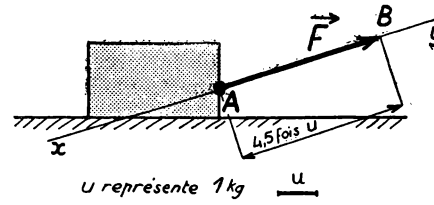


Fig. 8. — Une force F se représente graphiquement au moyen d'un **vecteur** $\vec{F}$.

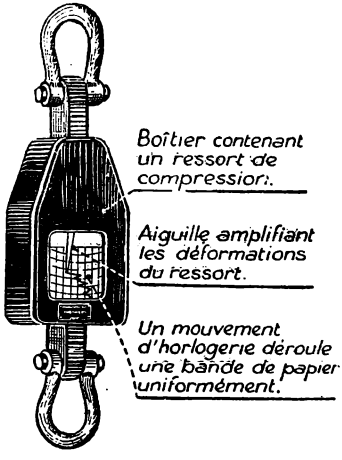


Fig. 9. — **Dynamomètre** à ressort, muni d'un dispositif enregistreur.

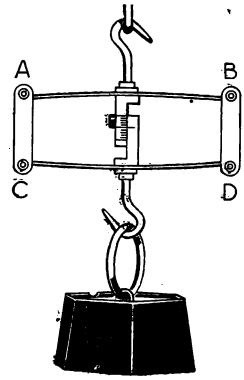


Fig. 10. — Les lames AB et CD s'écartent sous l'action du poids (*Dynamomètre de Poncelet*).

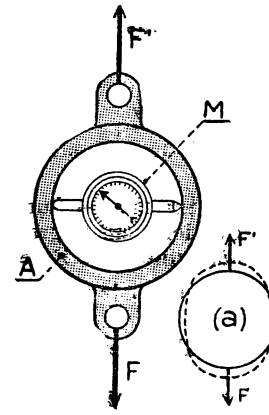


Fig. 11. — *L'anneau dynamométrique* A est fixé à un support rigide. Sous l'action de la force F, il s'ovalise (a). Le micromètre M permet de lire l'intensité de la force F.

7. Représentation d'une force par un vecteur.

Une force est complètement définie par quatre éléments :
1° son *point d'application;*
2° sa *droite d'action;*
3° son *sens;*
4° son *intensité.*
Nous pouvons la représenter par un *vecteur* défini comme suit :
son *origine* est le point d'application de la force;
sa *direction* est celle de la droite d'action;
son *sens* est celui de la force;
sa *longueur* est proportionnelle à l'intensité de la force.

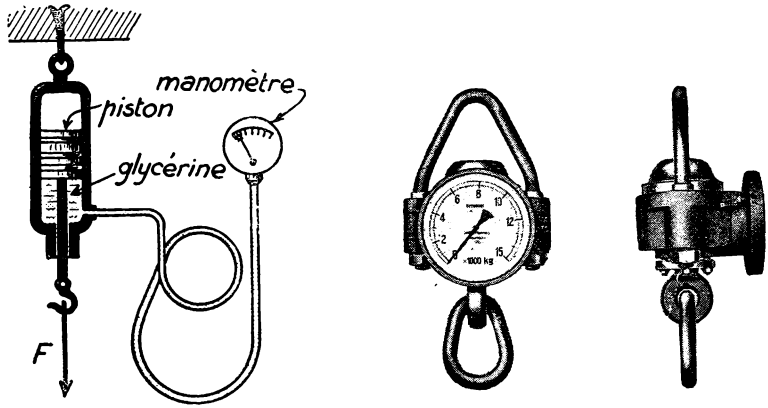


Fig. 12. — Schéma de principe et aspect réel d'un *dynamomètre hydraulique.*

Exemple. — Sur la figure 8, le segment orienté AB représente en direction, sens et grandeur, à l'échelle de 5 *millimètres* pour 1 *kilogramme-poids*, une force F de 4,5 *kgp.* Ce segment est le **vecteur-force F** qu'on désigne par le symbole $\vec{F}$.

8. Différents types de dynamomètres. Leur emploi.

Nous ne signalerons ici que les principaux types de dynamomètres :

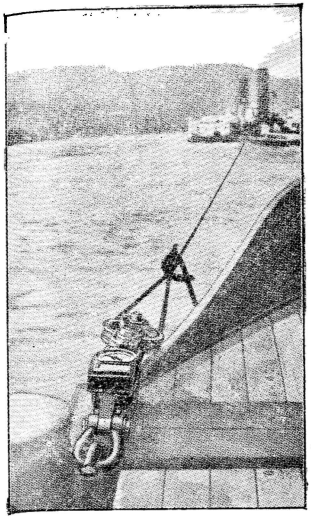
1° ***Les dynamomètres à ressort à boudin.*** — Le *peson à ressort* de la figure 6 en est le type. Le dynamomètre de la figure 9 est pourvu d'un dispositif d'enregistrement de l'effort appliqué au crochet.

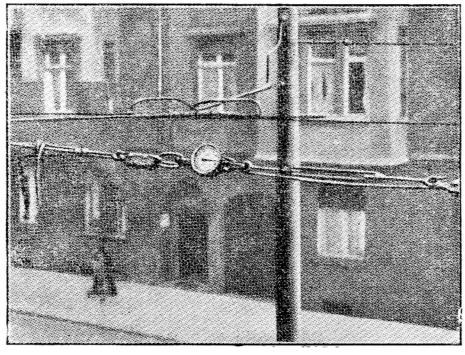
2° ***Les dynamomètres à lames*** (fig. 10).

3° ***Les anneaux dynamométriques*** (fig. 11). — L'anneau s'ovalise

sous l'effet de la charge. La déformation est indiquée par un micromètre comparateur M dont le cadran est gradué en kilogrammes-poids.

4° ***Les dynamomètres à liquide*** (fig. 12). — L'effort F à mesurer comprime le liquide. La pression qui en résulte déforme le tube manométrique. Le cadran, gradué en kilogrammes ou en tonnes, permet de lire directement l'intensité de la force F.





(Clichés Schæffer et Budenberg).

Fig. 13. — Mesure de la force nécessaire au remorquage d'un bateau.

Fig. 14. — Vérification de la tension de pose d'une ligne électrique.

Emploi des dynamomètres.

Mesure de la traction nécessaire au remorquage des véhicules, des bateaux (fig. 13). — Vérification de la tension de pose des lignes électriques (fig. 14).

Mesure des efforts développés par les machines de traction en résistance des matériaux. — Dans les usines métallurgiques, les charbonnages, les ports, les gares de marchandises : contrôle des poids des marchandises transportées.

Résumé.

1. On appelle force toute cause capable de modifier la vitesse d'un corps ou de provoquer la déformation d'un corps élastique qui reste immobile.

2. Les forces sont des grandeurs qu'on mesure à l'aide de ***dynamomètres.*** Le plus simple de ces appareils est basé sur la déformation élastique d'un ressort à boudin. Les unités pratiques de forces utilisées dans l'industrie sont : le ***kilogramme-poids*** et la ***tonne-poids.***

3. Une force F est une ***grandeur dirigée*** définie par quatre éléments : son ***point d'application***;

sa ***droite d'action;***
son *sens*;
son *intensité*, c'est-à-dire sa mesure en kilogrammes-poids.
On la représente graphiquement par un *vecteur* $\vec{F}$.

Exercices.

1. Lors de l'étalonnage d'un ressort, on a noté les allongements qui correspondent aux charges : 1 *kgp*, 2 *kgp*, 3 *kgp*, 4 *kgp*, et l'on a trouvé successivement : 16 *mm*, 32 *mm*, 48 *mm*, 64 *mm*. Dresser le diagramme des allongements en fonction des charges [en *abscisses* : les charges à raison de 20 *mm* pour 1 *kgp*; en *ordonnées* : les allongements à raison de 1 *mm* pour 1 *mm*].
Quelles conclusions en tirer?
Quelle est la charge qui correspond à un allongement de 28 *mm*? Quel est l'allongement du ressort sous l'action d'une charge de 3,6 *kgp*?

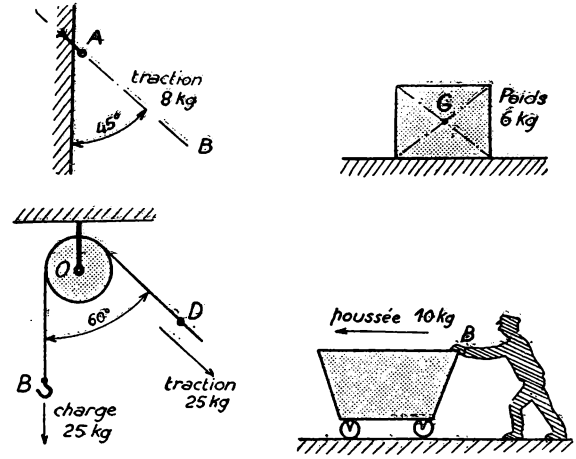


Fig. 15.

2. Représenter à l'échelle de 5 *mm* pour 1 *kgp*, les *vecteurs-forces* dans les cas suivants (fig. 15) :
a) *Poids* du corps A (point d'application en G);
b) *Poussée* horizontale au point B, du manœuvre sur le wagonnet;
c) *Traction* suivant AB sur le crochet encastré dans le mur;
d) *Poids* de la charge en B et *traction* en D sur le câble guidé par la poulie.

3. Exercice pratique : étude d'un dynamomètre.
1° Décrire avec soin un type de dynamomètre.
2° Étudier expérimentalement sa justesse, sa fidélité, sa sensibilité.

4. Exercice pratique : mesure de forces variées.
Mesurer à l'aide d'un dynamomètre l'effort de traction que peut exercer un élève sur une corde : *a*) à l'aide d'un seul bras; *b*) à l'aide de deux bras.
Mesurer l'effort nécessaire au glissement d'un corps sur le sol.

5. Chercher dans l'un des ateliers de l'École une ou des machines qui utilisent un dynamomètre.

Définitions et Principes de la Statique.

1. Expérience.

Soit une poulie légère, *très mobile* autour de son axe (fig. 1).

Prenons un cordonnet très souple; fixons une de ses extrémités au crochet d'un dynamomètre, et, après l'avoir engagé dans la gorge de la poulie, attachons un poids de 200 *grammes* (*force verticale*) à l'autre extrémité.

Nous constatons que le dynamomètre indique une force de 200 *grammes-poids* de direction *xx'*.

La force exercée en A, par l'extrémité du cordonnet sur son point d'attache, a donc même intensité que la force exercée par le poids P sur l'autre extrémité C du cordonnet.

Nous utiliserons cette propriété dans certains dispositifs expérimentaux.

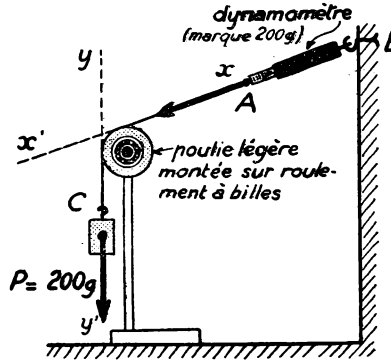


Fig. 1. — La force P, de direction *yy'*, est transmise, par l'intermédiaire de la poulie et du cordonnet, suivant la direction *xx'*.

2. État extérieur d'un corps solide.

Parmi les objets qui nous entourent, certains sont en mouvement, d'autres *en équilibre*, c'est-à-dire au repos. Le repos ou le mouvement d'un solide caractérisent, *au point de vue mécanique*, l'***état extérieur*** de ce corps.

a) Voici une pierre *immobile* suspendue à un fil. Coupons celui-ci : la pierre *tombe*. Son état extérieur, au point de vue mécanique, a changé.

b) Observons une automobile qui roule d'un *mouvement uniforme*. A un instant donné, le conducteur freine : la voiture ralentit, le *mouvement* devient *retardé*. L'état extérieur de l'automobile s'est modifié.

Nous dirons donc, *en mécanique*, que l'état extérieur d'un corps solide ne change pas :

1° quand il reste au repos s'il y était déjà;

2° quand les lois de son mouvement ne changent pas, s'il était d'abord en mouvement.

3. Système de forces.

Plusieurs forces qui agissent *simultanément* sur un corps solide constituent un *système de forces.*

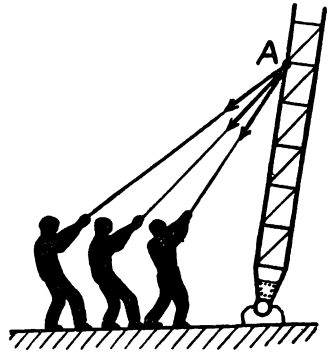


Fig. 2. — Les ouvriers tirent sur les câbles qui sont attachés au point A du pylône : Les **forces** qu'ils exercent sont **concourantes en A.**

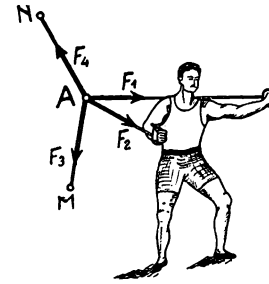


Fig. 3. — Cet athlète fait de la culture physique à l'aide d'un extenseur en caoutchouc, fixé en M et N. Nous reconnaissons quatre *forces concourantes* au point A.

Les forces d'un système peuvent être :

1° *Concourantes* (fig. 2 et 3), c'est-à-dire que leurs droites d'action passent par un même point;

2° *Parallèles;* les poids, par exemple, sont des forces parallèles (fig. 4);

3° *Quelconques* (fig. 5).

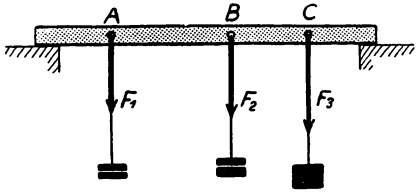


Fig. 4. — Sur cette poutre sont appliquées trois **forces parallèles** F_1, F_2, F_3.

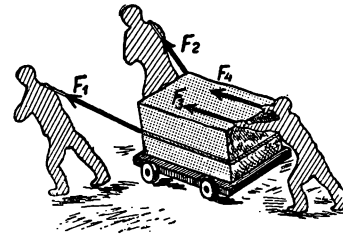


Fig. 5. — Les quatre forces F_1, F_2, F_3, F_4 forment un système de **forces quelconques.** Elles ne sont ni toutes parallèles, ni toutes concourantes.

4. Système de forces en équilibre.

EXPÉRIENCE. — Suspendons un corps solide A à l'extrémité libre d'un ressort (fig. 6). Lorsqu'il est *au repos,* nous pouvons repérer facilement sa position à l'aide d'un index, par exemple.

Nous pouvons lui appliquer un système de trois forces, *tel que sa position ne soit pas modifiée*, ce que nous obtiendrons par tâtonnements.

Nous constatons qu'on peut, *à volonté*, appliquer ou supprimer ce système de trois forces sans changer *l'état extérieur* du corps A, caractérisé ici par le repos. On dit alors que les forces considérées forment un *système en équilibre*.

DÉFINITION. — ***Un système de forces est dit en équilibre lorsqu'on peut l'appliquer à un corps mobile, ou le supprimer, sans changer l'état extérieur de ce corps*** [1].

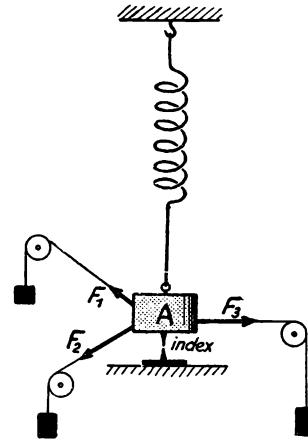


Fig. 6. — Le corps A était primitivement immobile. En appliquant les trois forces F_1, F_2, F_3, il demeure immobile. Les forces F_1, F_2, F_3, forment un **système en équilibre.**

5. Condition nécessaire et suffisante pour que deux forces soient en équilibre.

1° ***Deux forces égales et directement opposées se font équilibre.***

Nous admettons, comme vérité d'expérience, que si deux élèves tirent en *sens inverse* sur une corde avec des *forces égales*, cette corde reste immobile.

De même, dans l'expérience de la figure 7, les deux forces F_1 et F_2 égales et directement opposées ne modifient pas l'état extérieur du corps A qui était primitivement au repos : *elles sont en équilibre.*

2° *Réciproquement*, nous admettrons que ***si deux forces agissant sur un même corps solide sont en équilibre, elles sont égales et directement opposées.***

D'où l'énoncé de la loi expérimentale suivante : ***la condition nécessaire et suffisante pour que deux forces appliquées à un même corps solide soient en équilibre est qu'elles soient égales et directement opposées.***

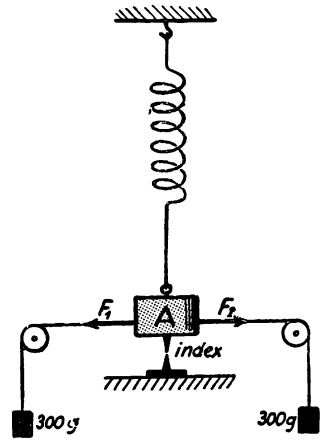


Fig. 7. — Deux forces égales et directement opposeés se font équilibre.

1. Quand on applique sur un corps un système de forces *en équilibre*, *l'état intérieur* du corps se modifie, au point de vue mécanique, comme nous le verrons en 4e année; des *forces intérieures* apparaissent, résultant de la déformation du corps.

6. Principe d'égalité de l'action et de la réaction.

1. Une pierre posée dans le creux de la main *presse* sur celle-ci. Pour la maintenir immobile nos muscles doivent réagir. Nous dirons que la pierre exerce sur la main une *action*, et que la main exerce sur la pierre une *réaction :* Action et réaction sont deux forces appliquées sur des *corps différents :* la main et la pierre; elles sont directement opposées et ont même intensité.

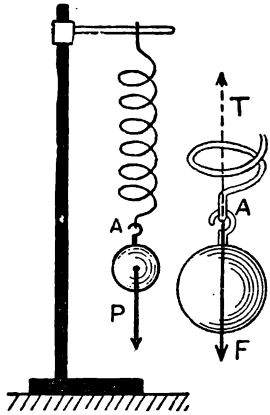


Fig. 8. — Le crochet tire sur le ressort (**Action**); le ressort tire sur le crochet (**Réaction**) T = F = P.

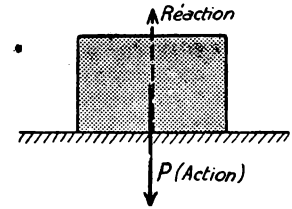


Fig. 9. — La réaction de la table sur le corps est égale et opposée au poids P de celui-ci.

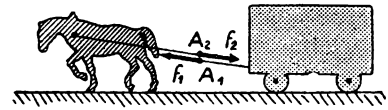


Fig. 10. — Le cheval tire sur la voiture avec une force f_1. La voiture tire sur le cheval avec une force f_2 égale et directement opposée.

2. Un ressort auquel on accroche un poids s'allonge (fig. 8). Au point A de contact, *le crochet tire sur le ressort* avec une force F égale au poids P du corps (*action*) et le ressort *tire sur le crochet* avec une force T égale et directement opposée à F (*réaction*).

3. Posons sur une table un lopin de fonte. Celui-ci presse sur la table avec une force égale à son poids. Inversement la table réagit sur le lopin avec une force égale et opposée (fig. 9).

4. Un cheval tire sur une voiture avec une force de 20 *kgp*. Coupons le trait en A (fig. 10).

Si nous voulons que rien ne soit changé au mouvement de la voiture, nous devons tirer sur l'extrémité A_1 de la section avec une force f_1 = 20 *kgp*.

Si nous voulons que rien ne soit changé au mouvement du cheval, il nous faut exercer, sur l'extrémité A_2 de la section, une force f_2 de 20 *kgp* en sens contraire de f_1. Ceci montre bien que, si le cheval tire sur la voiture avec une force de 20 *kgp*, inversement la voiture tire sur le cheval avec une force égale et directement opposée.

C'est *Newton* qui, le premier, a énoncé le principe suivant :

***Si un corps A exerce une force** (action) **sur un corps B, inversement B exerce sur A une force égale et directement opposée** (réaction).*

REMARQUE. — Cet énoncé ne suppose pas que les corps A et B soient en contact. Ainsi un aimant attire à distance un morceau de fer; inversement, celui-ci attire l'aimant : les deux forces d'attraction sont égales et directement opposées.

Enfin, il s'applique que les corps soient au repos ou en mouvement.

7. On peut déplacer le point d'application d'une force sur sa droite d'action.

Soit un corps solide A sollicité par une force F appliquée en M (fig. 11) Soit N un point de la droite d'action de F. En ce point, appliquons *deux forces en équilibre* F_1 et F_2, telles que ces forces aient même intensité et même direction que la force F. Ces deux forces ne modifient pas l'état extérieur du corps A.

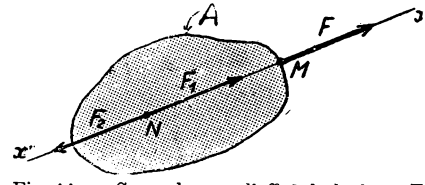


Fig. 11. — Sans changer l'effet de la force F on peut la faire glisser sur sa droite d'action, de manière à transporter son point d'application de M en N.

Considérons les forces F_2 et F. Elles sont égales et directement opposées : elles forment un système en équilibre qu'on peut supprimer. Il reste la force F_1, appliquée en N qui a même direction même sens, même grandeur que la force F qui était appliquée en M. Tout se passe comme si l'on avait fait glisser F sur sa ligne d'action, de manière à amener son point d'application en N.

CONCLUSION. — ***On peut faire glisser le point d'application d'une force sur sa ligne d'action, sans changer l'état extérieur du corps solide auquel cette force est appliquée.***

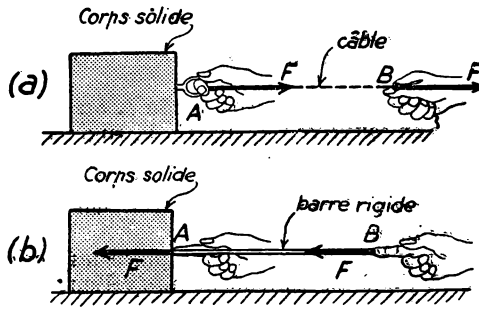


Fig. 12. — La force F peut être appliquée indifféremment en A ou en B.

Applications. — 1. La force F appliquée au point A d'un corps solide (fig. 12) peut être transportée au point B de sa ligne d'action

pourvu que B soit invariablement[1] *lié au point A* (câble dans le cas d'une traction — barre rigide dans le cas d'une poussée).

2. On montre que la poussée de la vapeur sur le piston d'une machine est équivalente à une force F localisée au point C (fig. 13). On peut déplacer F de C en D le long de la tige du piston.

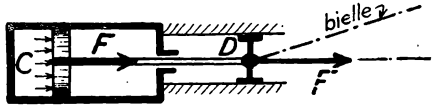


Fig. 13. — Nous pouvons transporter en D le point d'application de la force F supposée localisée au centre C du piston.

8. Systèmes de forces équivalents.

Reportons-nous à la figure 6. Le corps solide A demeure immobile lorsqu'on lui applique un système S de trois forces en équilibre.

Substituons au système S un système S' de deux forces en équilibre (fig. 7). L'état extérieur du corps A n'a pas changé.

Nous dirons que le système S *est équivalent* au système S'.

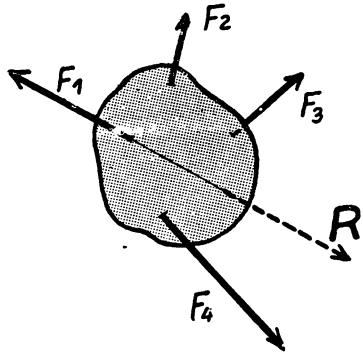


Fig. 14. — Les forces F_1, F_2, F_3, F_4 sont en équilibre. La force R qui remplace les trois forces F_2, F_3, F_4 est dite leur **résultante.**

DÉFINITION. — ***Deux systèmes de forces*** *(en équilibre ou non)* ***appliqués successivement à un même corps solide, sont dits équivalents, si l'on peut remplacer l'un par l'autre sans changer l'état extérieur du corps.***

9. Définition de la résultante d'un système de forces.

Considérons un corps solide A *au repos*, sollicité par un *système S de forces en équilibre :* F_1, F_2, F_3, F_4 (fig. 14).

Supprimons les forces F_2, F_3, F_4. Sous l'action de la seule force F_1, l'équilibre du corps est détruit. Pour le rétablir, il suffit de faire agir une force R égale et opposée à F_1, car ces deux forces forment un système en équilibre.

Par suite, la force R remplace les actions simultanées des forces F_2, F_3, F_4 : elle est *équivalente* au système S' de ces trois forces, elle est dite leur ***résultante.***

DÉFINITION. — ***Quand un système de forces est équivalent à une force unique, celle-ci est appelée la résultante du système.***

1. C'est-à-dire que B et A fassent partie du même corps *solide.*

Nous verrons par la suite qu'un système de forces n'est pas toujours équivalent à une force unique.

REMARQUE. — D'après ce qui précède, nous voyons que la force F_1, qui fait partie du *système en équilibre* S, est égale et opposée à la résultante R de toutes les autres forces du système. D'où le théorème :

Lorsqu'un système de forces est en équilibre, l'une quelconque d'entre elles est égale et opposée à la résultante de toutes les autres.

10. Plan d'étude de la statique.

Dans les leçons qui vont suivre, nous étudierons les méthodes qui permettent de remplacer un système de forces F_1, F_2, F_3..., F_n, appliquées à un solide, par le ***système équivalent le plus simple possible.***

En particulier, nous montrerons qu'un système de *forces concourantes* ou *parallèles* admet une RÉSULTANTE, qu'un système de *forces quelconques* est réductible à une RÉSULTANTE et à un COUPLE.

Nous en déduirons des conclusions quant aux conditions d'équilibre des corps auxquels ces systèmes de forces sont appliqués.

Résumé.

1. Un système de forces est dit en équilibre quand on peut l'appliquer à un corps solide, ou le supprimer, sans changer l'état extérieur de ce corps.

2. La condition nécessaire et suffisante pour que deux forces soient en équilibre est qu'elles soient égales et directement opposées.

3. Si un corps A exerce une action sur un corps B, inversement B exerce sur A une réaction égale et directement opposée *(Principe de Newton).*

4. On peut faire glisser le point d'application d'une force sur sa ligne d'action sans changer l'extérieur du corps auquel cette force est appliquée.

5. Lorsqu'un système de forces est en équilibre, l'une quelconque d'entre elles est égale et opposée à la *résultante* de toutes les autres.

Résultante de deux forces concourantes

1. L'expérience montre que deux forces concourantes ont une résultante.

Soit le dispositif expérimental de la figure 1 dont le schéma est représenté par la figure 2. Trois forces F_1, F_2, F_3, concourantes en A, se font équilibre : le point A reste immobile.

A. Observations. — *a*) En nous plaçant de profil nous vérifions

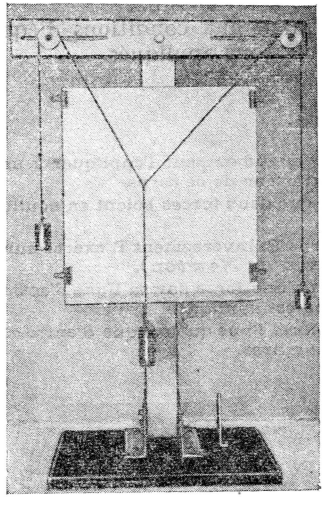


Fig. 1. — L'appareil est formé de profilés en duralumin. L'écran placé derrière les fils est mobile: on peut l'approcher jusqu'à ce qu'il les touche.

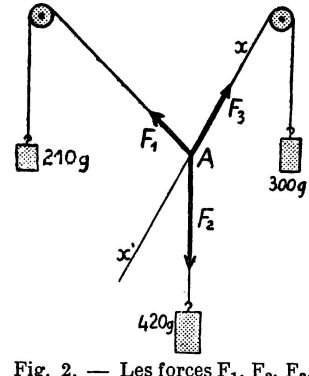


Fig. 2. — Les forces F_1, F_2, F_3, sont *en équilibre*. L'une quelconque d'entre elles, F_3 par exemple, est égale et opposée à la résultante des deux autres.

que les directions des fils paraissent confondues, donc appartiennent à un même plan. Nous en concluons que : *trois forces concourantes en équilibre sont dans un même plan.*

b) Prenons un trusquin d'ajusteur et plaçons sa pointe en face du point A. Écartons le système de sa position d'équilibre : il y revient si les poulies sont très mobiles sur leurs axes. Par suite : *la figure d'équilibre de trois forces d'intensités données est unique.*

c) Sur une feuille de papier à dessin, fixée sur une planchette et placée derrière les fils, relevons la position du point A et les directions des forces concourantes. Notons les valeurs de celles-ci : $F_1 = 210$ *gp*, $F_2 = 420$ *gp*, $F_3 = 300$ *gp*.

L'intensité de l'une quelconque de ces forces est comprise entre la somme et la différence des intensités des deux autres.

B. CONSTRUCTION. — *a)* Sur la feuille précédente représentons les forces F_1, F_2, F_3 par des vecteurs ; ce qui est possible puisque nous connaissons leur point d'application A, leur direction (relevée comme il a été dit), leur sens, leur grandeur (fig. 3).

b) Traçons le parallélogramme ABCD dont deux côtés sont les vecteurs $\vec{F_1}$ et $\vec{F_2}$.

Nous constatons que *le vecteur* $\overrightarrow{AC}$, *diagonale du parallélogramme ABCD, est égal et directement opposé au vecteur* $\vec{F_3}$.

c) D'après le théorème énoncé à la fin de la leçon précédente, ce vecteur $\overrightarrow{AC}$, égal et opposé à $\vec{F_3}$, représente la résultante $\vec{R}$ des forces F_1 et F_2.

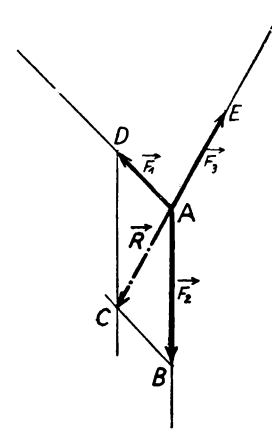


Fig. 3. — La résultante R des forces F_1 et F_2 est représentée en *direction, sens* et *grandeur* par la diagonale AC du parallélogramme construit sur les vecteurs $\vec{F_1}$ et $\vec{F_2}$.

C. LOI FONDAMENTALE. — ***La résultante R de deux forces F_1 et F_2, concourantes en A, est représentée en direction, sens et grandeur par la diagonale issue de A du parallélogramme construit sur les vecteurs forces $\vec{F_1}$ et $\vec{F_2}$*** (fig. 4).

Cette règle est dite *règle du parallélogramme des forces*. On la traduit par *l'égalité vectorielle :*

$$\vec{R} = \vec{F_1} + \vec{F_2}.$$

REMARQUE. — Pour obtenir $\vec{R}$ on peut aussi mener par B un vecteur $\overrightarrow{BC}$ équipollent à $\vec{F_1}$ (fig. 5). C'est pourquoi on dit encore que $\vec{R}$ est la *somme géométrique* des vecteurs $\vec{F_1}$ et $\vec{F_2}$.

2. Calcul de l'intensité de la résultante de deux forces concourantes.

Calculons l'intensité de la force R, résultante des forces F_1 et F_2 (fig. 4).

Le triangle ABC donne :

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + 2AB \times BH$$

Mais dans le triangle rectangle BCH : $BH = BC \cos \alpha$,

d'où $$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + 2AB \times BC \cos \alpha$$

Remplaçons les segments par les *mesures* des forces qu'ils représentent :

$$AC = R \quad ; \quad AB = F_2 \quad ; \quad BC = F_1$$

$$\boldsymbol{R^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos \alpha}$$

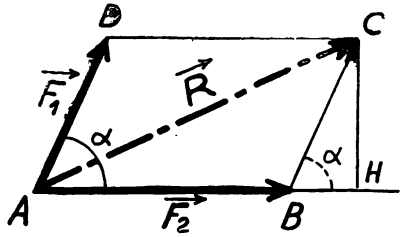


Fig. 4 — Calculer la résultante R.

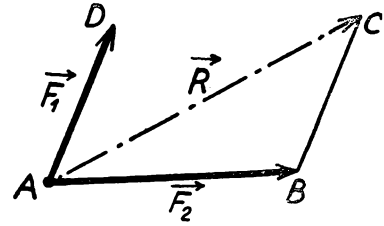


Fig. 5. — La résultante R des deux forces concourantes F_1 et F_2 est égale à leur *somme géométrique*.

Exemple numérique : *Soient :* $F_1 = 10$ *kgp ;* $F_2 = 15$ *kgp ;* $\alpha = 60°$. *Calculer* R. Substituons ces nombres aux lettres dans la formule précédente :

$$R^2 = \overline{10}^2 + \overline{15}^2 + 2 \times 10 \times 15 \times 0{,}5$$
$$= 100 + 225 + 150 = 475$$

d'où $$R = \sqrt{475} = \boldsymbol{21{,}79\ kgp}$$

Remarque. — Résolvons le même problème par la méthode graphique en prenant pour échelle des forces 1 *cm* pour 4 *kgp* par exemple (fig. 6).

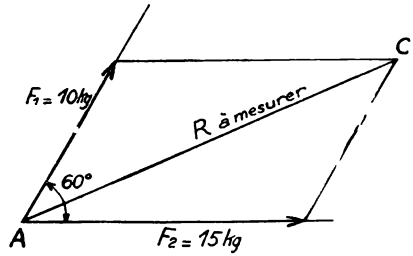


Fig. 6. — Détermination, par la méthode graphique, de l'*intensité de la résultante de deux forces concourantes.*
Dessinez cette figure avec soin, à l'échelle de 1 *cm* pour 2 *kgp*. Tirez-en la valeur de R.

Dans le parallélogramme ABCD, AC mesure, à l'échelle adoptée, la résultante. Nous trouvons : AC = 54 *mm*.

D'où $4 \times 5{,}4 = 21{,}6$ *kgp*

Le résultat obtenu n'est qu'approché. Toutefois la précision est suffisante et c'est pourquoi on fait souvent usage de la méthode graphique dans les nombreux problèmes que pose la pratique.

3. Valeur de la résultante de deux forces concourantes dans quelques cas particuliers.

1er Cas. ***L'angle α des composantes est nul.*** — Les forces F_1 et

F_2 agissent dans le même sens, sur la même droite d'action (fig. 7). L'intensité de la résultante R est égale à la *somme* des intensités des composantes :

$$R = F_1 + F_2$$

2e Cas. ***L'angle*** $\alpha = 180°$. — Les forces F_1 et F_2 agissent alors en sens contraires sur la même droite d'action (fig. 8). La résultante a même

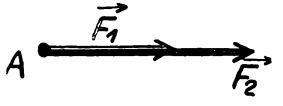


Fig. 7. — Quelle est la résultante de deux forces de même direction et de même sens?

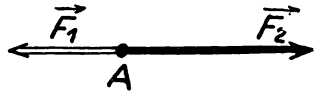


Fig. 8. — Les deux forces ont même direction, mais sont de sens contraires. Quel est leur résultante?

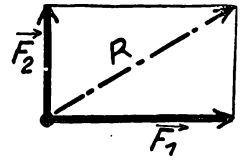


Fig. 9. — Calculez la résultante de ces deux forces dont les directions sont rectangulaires.

direction et même sens que la plus grande ; son intensité est la différence des intensités des composantes :

$$R = F_1 - F_2$$

En particulier la résultante est nulle (R = O) si $F_1 = F_2$

3e Cas. ***L'angle*** $\alpha = 90°$. — La résultante est représentée par la diagonale du rectangle construit sur les vecteurs $\vec{F_1}$ et $\vec{F_2}$ (fig. 9).

Son intensité :

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}$$

4e Cas. ***Les composantes ont même intensité.*** — Le parallélogramme des forces est alors un losange (fig. 10). La résultante R, représentée par la diagonale AC, est donc *bissectrice* de l'angle formé par les droites d'action des composantes.

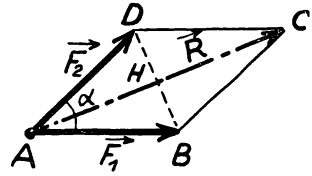


Fig. 10. — Les deux composantes sont égales. Calculez leur résultante.

Dans le triangle isocèle ABC, on a :

$$AC = 2 \times AH = 2 \times AB \times \cos \frac{\alpha}{2}$$

D'où :

$$R = 2F_1 \cos \frac{\alpha}{2}$$

Résumé

1. ***Loi fondamentale :*** La résultante R, de deux forces F_1 et F_2 concourantes en A, est représentée en direction, sens et grandeur, par la diagonale issue de A du parallélogramme construit sur les vecteurs forces $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$.

$$\overrightarrow{R} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}.$$

2. ***Conséquence :*** Si α est l'angle des forces F_1 et F_2, on a :

$$R^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1 F_2 \cos \alpha.$$

3. ***Remarque :*** Trois forces concourantes ***en équilibre*** sont dans un même plan. Leur résultante est nulle.

Exercices.

1. Les deux brins d'une courroie, tendus également, exercent chacun une traction de 60 *kgp* sur la poulie de la figure 11.

Déterminer la résultante des actions de la courroie sur la poulie (cette résultante est équilibrée par les réactions des paliers).

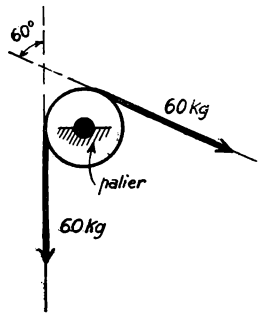


Fig. 11.

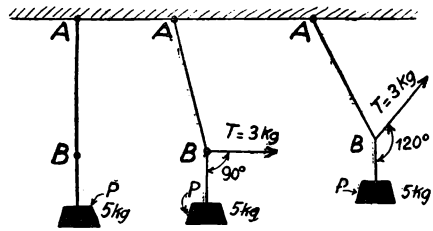


Fig. 12.

2. En adoptant les nombres qui, sur la figure 2. mesurent l'intensité des forces F_2 F_3, évaluer :

a) l'intensité de leur résultante;

b) l'angle des fils qui s'enroulent sur la poulie.

3. A l'extrémité libre d'un fil attaché en A on accroche un poids P de 5 *kg* (fig. 12). A l'aide d'un fil lié en B au premier, on exerce une traction T de 3 *kgp* faisant avec la verticale un angle de 90°, puis 120°.

Déterminer dans chaque cas, graphiquement et par le calcul :

1° la résultante des forces P et T;

2° la réaction du crochet A;

3° l'angle du fil AB avec la verticale du point A.

Echelle des forces : 1,5 *cm* pour 1 *kgp*.

4. Vérifier que 3 forces concourantes égales, faisant entre elles des angles égaux à 120°, ont une résultante nulle.

5. Démontrer que la condition nécessaire et suffisante pour que trois forces concourantes soient en équilibre est que leurs vecteurs soient équipollents aux côtés d'un triangle parcouru dans un certain sens.

Décomposition d'une force en deux autres concourantes. Résultante de plusieurs forces concourantes.

I. DÉCOMPOSITION D'UNE FORCE EN DEUX AUTRES CONCOURANTES

1. On peut remplacer une force donnée R, appliquée en un point A, par deux autres forces concourantes au même point.

Soit une force $\overrightarrow{R}$ appliquée en un point A d'un corps solide (fig. 1). Soient A*x* et A*y* deux directions *quelconques dont le plan contient R.*

Par C, extrémité du vecteur $\overrightarrow{R}$, menons les parallèles à ces directions, qui coupent A*x* et A*y* en B et D. Ces points sont les extrémités de deux vecteurs-forces $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$, dont la résultante est $\overrightarrow{R}$.

Les deux systèmes de forces $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$ d'une part, $\overrightarrow{R}$ d'autre part sont *équivalents.* On peut donc remplacer celle-ci par les deux forces $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$ agissant suivant A*y* et A*x*.

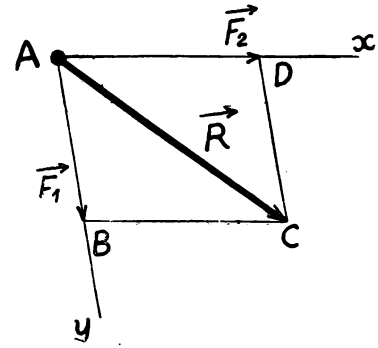


Fig. 1. — La force R peut être remplacée par les deux forces F_1 et F_2 dont elle est la résultante.

On dit qu'*on a* ***décomposé*** *la force R suivant les deux directions Ax et Ay.*

2. Premier exemple.

Supposons que les directions A*x*, A*y* fassent entre elles un angle voisin de 180°, et que, de plus, la résultante soit portée par la bissectrice de cet angle (fig. 2).

La force R se décompose en deux autres, F_1 et F_2, égales, qui sont d'autant plus grandes que l'angle α est plus voisin de 180°.

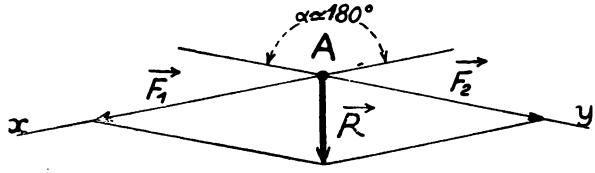


Fig. 2. — Plus l'angle α est grand, plus les forces F_1 et F_2 sont grandes.

C'est ainsi que pour soulever une lourde pierre à l'aide de cordages il faut, comme l'indique la figure 3, adopter la disposition I, plutôt que la disposition II.

3. Deuxième exemple : corps posé sur un plan incliné.

Soit P le poids d'une brique posée sur un plan incliné (fig. 4). Nous n'avons pas la possibilité physique de remplacer cette force poids par

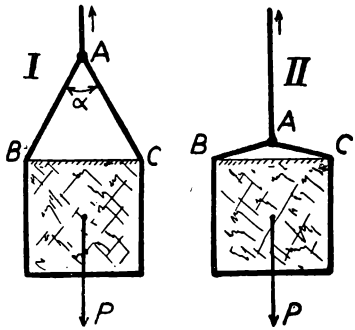


Fig. 3. — On soulève une pierre à l'aide de cordages. Pourquoi faut-il adopter la disposition I plutôt que la disposition II ?

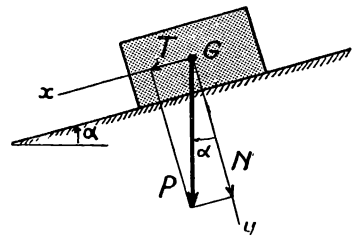


Fig. 4. — La force N est la *composante normale* du poids P, la force T est sa *composante tangentielle*.

deux autres forces réelles dont elle soit la résultante, mais l'on peut effectuer une décomposition fictive.

En effet, projetons orthogonalement le vecteur $\vec{P}$ sur les deux directions rectangulaires Gx et Gy. Nous définissons deux vecteurs forces $\vec{N}$ et $\vec{T}$ qui admettent $\vec{P}$ pour résultante.

La force $\vec{N}$, *perpendiculaire au plan incliné*, s'appelle ***composante***

normale du poids $\overrightarrow{P}$. La force $\overrightarrow{T}$, *parallèle à ce même plan*, est la ***composante tangentielle*** de ce poids $\overrightarrow{P}$.

On voit que le poids P a deux effets :

1° il appuie la brique sur le plan avec une force $N = P \cos \alpha$

2° il tend à la faire glisser le long du plan avec une force $T = P \sin \alpha$.

APPLICATION NUMÉRIQUE. — *Soient* $P = 5\ kg$; $\alpha = 15°$. *Calculer N et T.*
Les tables de lignes trigonométriques donnent :

$$\sin 15° \simeq 0{,}26; \qquad \cos 15° \simeq 0{,}97.$$

D'où

$$N = P \cos \alpha = 5 \times 0{,}97 = \mathbf{4{,}850\ kgp}$$

$$T = P \sin \alpha = 5 \times 0{,}26 = \mathbf{1{,}300\ kgp}$$

4. Troisième exemple : forces qui entrent en jeu dans le système : piston, bielle, manivelle.

Sur la figure 5 la poussée P de la vapeur admise dans le cylindre se transmet à chaque instant à l'extrémité A de la tige du piston.

Décomposons $\overrightarrow{P}$ suivant la direction AB de la bielle et suivant la direction Ay, perpendiculaire à la tige du piston. Nous obtenons $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$.

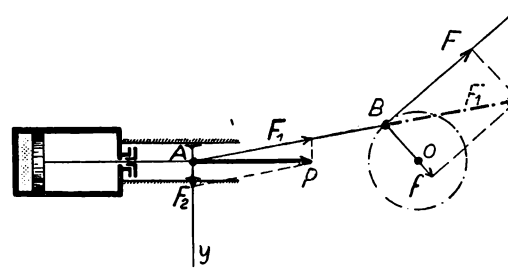


Fig. 5. — La force P se décompose en trois autres F_2, F, *f*.

La force $\overrightarrow{F_2}$ appliquée à l'extrémité A de la tige du piston tend à faire fléchir celle-ci. Elle est neutralisée par la réaction d'une glissière sur le coulisseau fixé à la tige du piston en A (fig. 6).

La force $\overrightarrow{F_1}$ se transmet en B où l'on peut la décomposer à son tour en deux forces :

1° F, portée par la tangente en B au cercle décrit par le maneton de manivelle;

2° $\overrightarrow{f}$, portée par le rayon OB.

La force F fait tourner la manivelle OB. On l'appelle *effort tangentiel.*

La force *f* comprime le bras de manivelle OB. C'est l'*effort radial.*

En résumé, on peut considérer que la poussée P se décompose à chaque instant en trois forces qui sont : F_2, F et *f*.

II. RÉSULTANTE DE PLUSIEURS FORCES CONCOURANTES

4. Plusieurs forces concourantes admettent une résultante.

Les résultats établis précédemment pour deux forces concourantes s'étendent au cas de plusieurs forces.

Soient F_1, F_2, F_3, F_4 quatre forces concourant en un point A (fig. 6).

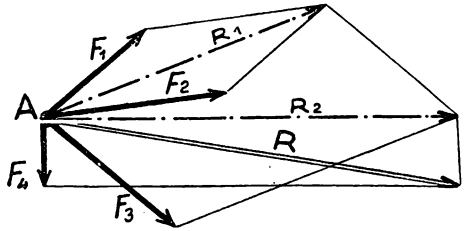


Fig. 6. — R est la résultante des forces F_1, F_2, F_3, F_4.

a) *Remplaçons deux des forces, F_1 et F_2 par exemple, par leur résultante R_1. Le système obtenu est équivalent au système donné et il ne comprend plus que trois forces : R_1, F_3, F_4.*

b) *De même les forces R_1 et F_3 admettent une résultante R_2 : et le système R_2, F_4 est équivalent au système primitif.*

c) Enfin, *R_2 composée à son tour avec F_4, donne la résultante R cherchée.*

La solution consiste donc à appliquer plusieurs fois de suite la *règle du parallélogramme* des forces.

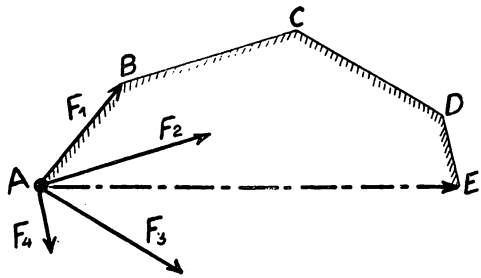


Fig. 7. — Le vecteur $\overrightarrow{AE}$ qui ferme le **polygone de Varignon** ABCDE est la résultante des forces F_1, F_2, F_3, F_4.

REMARQUE. — En pratique, au lieu de construire une série de parallélogrammes, il est préférable d'utiliser la construction signalée au paragraphe 1 de la leçon précédente.

Par B, extrémité du vecteur force $\overrightarrow{F_1}$, menons un vecteur équipollent au vecteur force $\overrightarrow{F_2}$ (fig. 7).

Le vecteur $\overrightarrow{AC}$, qu'on ne trace pas en réalité, mesure en direction, sens et grandeur, la résultante des forces F_1 et F_2.

Du point C traçons un vecteur $\overrightarrow{CD}$ équipollent à la force F_3, enfin par D un vecteur $\overrightarrow{DE}$ équipollent à la force $\overrightarrow{F_4}$.

Le vecteur $\overrightarrow{AE}$ *qui ferme* le contour polygonal ABCDE est la résultante $\vec{R}$ du système de forces considéré.

La ligne polygonale ABCDE est appelée polygone des forces ou ***polygone de Varignon*** [1] : c'est la *somme géométrique des forces données* :

$$\vec{R} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} + \vec{F_4}.$$

CONCLUSION. — ***Un système de forces coucourantes en A a une résultante. Elle est représentée par le vecteur d'origine A qui ferme le polygone de Varignon, obtenu en portant bout à bout, à partir de l'une quelconque des forces, des vecteurs équipollents aux vecteurs forces donnés.***

REMARQUE 1. — Les forces concourantes données peuvent être ou non dans un même plan. Le polygone de Varignon est alors *plan* ou *gauche*.

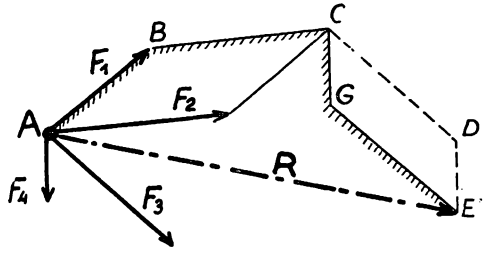


Fig. 8. — L'ordre adopté pour composer les forces concourantes n'importe pas.

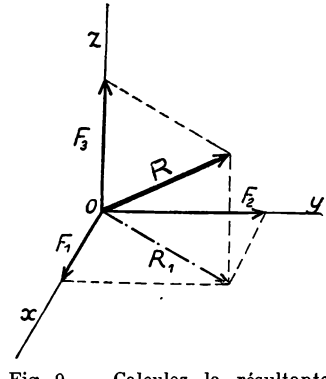


Fig. 9. — Calculez la résultante des forces F_1, F_2, F_3, deux à deux rectangulaires.

REMARQUE 2. — L'ordre dans lequel on procède pour tracer le polygone n'importe pas. En effet, sur la figure 8, en partant de la force $\vec{F_2}$, on a mené successivement :

HC équipollent à $\vec{F_1}$
CG — $\vec{F_4}$
GE — $\vec{F_3}$

L'aspect du polygone de Varignon a changé, mais la ligne de fermeture AE n'a varié ni en grandeur, ni en position.

REMARQUE 3. — *Si le polygone de Varignon se ferme*, c'est-à-dire si le point E est confondu avec A, la résultante du système de forces donné est nulle : *le système est en équilibre.*

1. *Varignon* (1654-1722) : Mathématicien français, célèbre par ses travaux relatifs à la Mécanique.

6. Cas particulier : résultante de trois forces deux à deux rectangulaires.

Soient $F_1 = 25$ *kgp*, $F_2 = 30$ *kgp*, $F_3 = 40$ *kgp* les intensités de ces trois forces (fig. 9). Leur résultante se calcule aisément.

La résultante R_1 des forces F_2 et F_3 est dans le plan xOy.

$$R_1^2 = F_1^2 + F_2^2.$$

De même la résultante de R_1 et de F_3 est R telle que

$$R^2 = R_1^2 + F_3^2 = F_1^2 + F_2^2 + F_3^2.$$

Avec les valeurs numériques proposées :

$$R^2 = \overline{25}^2 + \overline{30}^2 + \overline{40}^2 = 3\ 125$$

d'où $$R = \sqrt{3\ 125} \simeq \mathbf{56\ kgp}$$

Résumé

1. Une force **R**, appliquée en un point **A** d'un corps solide, peut toujours être ***décomposée*** en deux autres, concourantes en **A**, dont **R** soit la résultante.

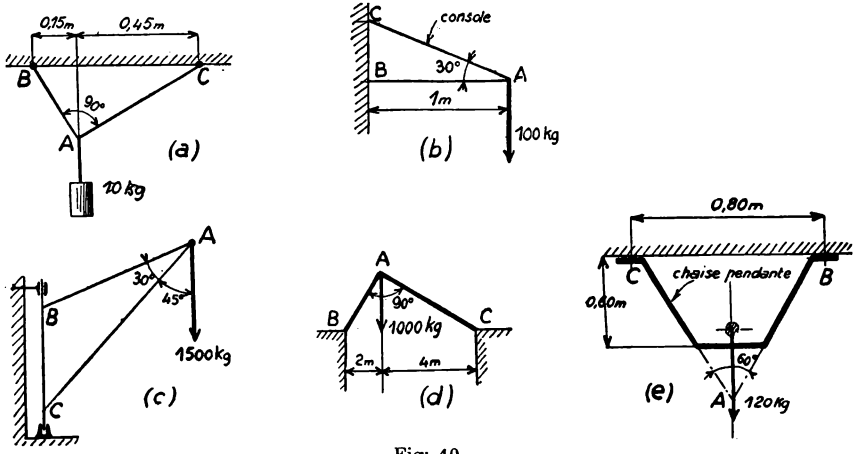
2. La décomposition d'une force en deux autres concourantes permet d'analyser les effets de cette force sur le corps solide auquel elle est appliquée.

3. Plusieurs forces concourantes admettent une résultante obtenue de la manière suivante : on compose deux quelconques des forces, puis la résultante obtenue avec une troisième et ainsi de suite.

On peut encore dire que ***la résultante est la somme géométrique des forces données*** ou encore ligne de fermeture du ***polygone de Varignon.***

Exercices

1· Déterminer graphiquement (ou par le calcul) les efforts qui sollicitent les barres AB et AC dans les schémas ci-dessous (fig. 10).



Fig· 10.

(On suppose qu'aux points B et C se trouvent des articulations et non pas des liaisons rigides et on décompose la force donnée suivant les directions AB et AC.)

2. Décomposer la poussée qui s'exerce à un instant donné sur le piston d'un moteur à explosion, suivant les directions AB et $y'y$ (fig. 11). En déduire graphiquement l'effort tangentiel F. Expliquer pourquoi le cylindre s'ovalise au bout d'un certain temps.

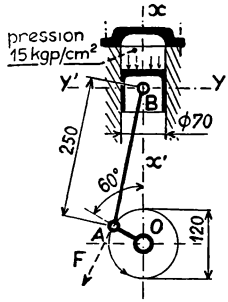


Fig. 11.

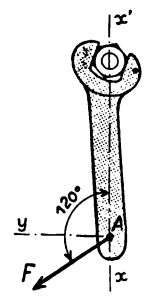


Fig. 12.

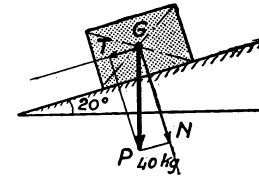


Fig. 13.

3. Pour serrer un écrou, un manœuvre exerce sur une clé un effort F de 15 *kgp* (fig. 12). Décomposer F suivant Ax et Ay et analyser l'effet de chaque composante ainsi obtenue.

4. Une masse de fonte d'un poids de 40 *kg* repose sur un plan incliné (fig. 13).

1° Déterminer graphiquement les efforts N et T (échelle des forces 1 *mm* pour 1 *kgp*).

2° Calculer les intensités N et T et comparer aux résultats obtenus graphiquement.

5. On joint l'un des sommets d'un cube à tous les autres sommets. Les vecteurs obtenus définissent un système de forces concourantes dont on demande de déterminer la résultante.

(On supposera que le côté du cube représente une force de 10 *kgp*.)

6. La figure 14 est le schéma d'une certaine poinçonneuse. En faisant agir une force au point B, le poinçon glisse suivant $x'x$.

1° Décomposer la force F suivant les directions BA, BC et analyser les effets des forces ainsi obtenues.

2° Calculer en fonction de F et de l'angle α la force qui presse le poinçon sur la tôle.

3° La résistance offerte au poinçon étant 940 *kgp*, calculer l'effort F nécessaire pour vaincre cette résistance si $\alpha = 85°$.

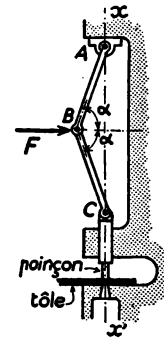


Fig. 14.

Résultante de deux forces parallèles et de même sens.

1. Détermination expérimentale de la résultante de deux forces parallèles et de même sens.

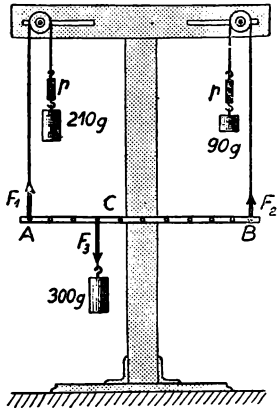


Fig. 1. — Les trois forces F_1, F_2, F_3 se font équilibre. La force F_3 est égale et opposée à la résultante des forces F_1 et F_2, *parallèles et de même sens.*

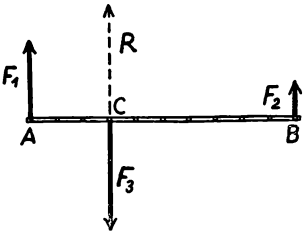


Fig. 2. — R est la résultante des deux forces parallèles F_1 et F_2 :

$$R = F_1 + F_2$$

$$F_1 \times CA = F_2 \times CB$$

Utilisons l'appareil de la figure 1. La barre AB est percée de trous équidistants de 5 *centimètres*. Son poids est équilibré par celui de deux contrepoids *p*, portant des crochets.

Suspendons à ces crochets deux poids de 90 *gp* et 210 *gp* par exemple. Ils exercent, sur la barre AB, deux forces parallèles et de même sens F_1 et F_2; cette barre tend à monter. Pour l'en empêcher, il faut la tirer vers le bas avec une certaine force F_3; le bon sens nous suggère que son intensité est égale à la somme des poids suspendus, soit :

$$210 + 90 = 300 \ gp$$

Nous trouvons par tâtonnements le point C où il faut faire agir un poids de 300 *gp* pour maintenir la barre en équilibre. La barre demeure en équilibre sous l'action des trois forces parallèles F_1, F_2, F_3.

La force F_3 est égale et opposée à la résultante des deux autres F_1 et F_2 (fig. 2).

1° Nous vérifions que le point C d'application de la résultante est entre A et B, plus près de la plus grande force F_1 que de la plus petite F_2 :

$$CA = 15 \ cm, \ CB = 35 \ cm.$$

2° Faisons le produit de chaque force par sa distance au point d'application de la résultante :

$$F_1 \times CA = 210 \times 15 = 3\,150$$
$$F_2 \times CB = 90 \times 35 = 3\,150$$

Donc

$$F_1 \times CA = F_2 \times CB$$

D'où la loi expérimentale suivante : ***La résultante de deux forces F_1 et F_2, parallèles et de même sens, appliquées aux points A et B d'un corps solide, est une force R qui leur est parallèle et de même sens.***

Son intensité est égale à la somme des intensités des composantes :

$$R = F_1 + F_2$$

Son point d'application est situé entre A et B, de telle sorte que les produits de chaque composante par sa distance au point C sont égaux :

$$F_1 \times CA = F_2 \times CB$$

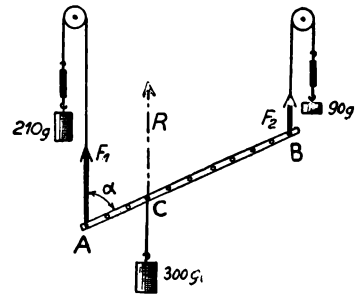


Fig. 3. — La barre vient d'être inclinée, les forces F_1 et F_2 demeurent parallèles. Leur résultante R ne change pas.

2. La résultante ne dépend pas de l'angle formé par les directions des forces avec la ligne qui joint leurs points d'application.

Sans modifier les intensités des forces, inclinons la barre AB et rapprochons les poulies de manière à réaliser encore le parallélisme des fils attachés en A et B (fig. 3). Nous constatons que l'équilibre subsiste.

Tout se passe exactement comme si les forces F_1 et F_2, au lieu d'être perpendiculaires à la barre, s'étaient inclinées sur elle, en demeurant parallèles. On voit que le point C d'application de la résultante ne change pas sur la ligne AB.

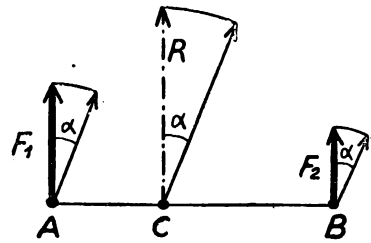


Fig. 4. — Ni le point d'application, ni l'intensité de la résultante ne changent, lorsqu'on fait pivoter du même angle les forces F_1 et F_2 autour de leur point d'application.

CONCLUSION. — ***Ni le point d'application, ni l'intensité de la résultante de deux forces parallèles et de même sens ne changent lorsqu'on fait pivoter du même angle ces forces autour de leur point d'application*** (fig. 4).

3. La relation $F_1 \times CA = F_2 \times CB$ permet de calculer le point d'application de la résultante R.

L'égalité $F_1 \times CA = F_2 \times CB$ peut se mettre sous forme de proportion :

$$\frac{F_1}{CB} = \frac{F_2}{CA} = \frac{F_1 + F_2}{CB + CA}$$

d'où $$\frac{F_1}{CB} = \frac{F_2}{CA} = \frac{R}{AB}.$$

Appliquons cette formule aux données numériques de la figure 5.

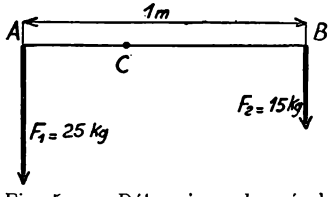


Fig. 5. — Déterminez la résultante R des forces F_1 et F_2 en appliquant la relation : $\frac{F_1}{CB} = \frac{F_2}{CA} = \frac{R}{AB}$

La résultante R a pour intensité

$$R = F_1 + F_2 = 25 + 15 = 40 \text{ kgp}$$

Son point d'application C entre A et B est tel que :

$$\frac{F_1}{CB} = \frac{F_2}{CA} = \frac{R}{AB}.$$

Remplaçons par les valeurs numériques :

$$\frac{25}{CB} = \frac{15}{CA} = \frac{40}{1}.$$

En considérant l'égalité des deux derniers rapports, par exemple, on tire :

$$CA = \frac{15}{40} = 0{,}375 \text{ m}$$

Il reste à indiquer le point C sur la figure et à mener en ce point un vecteur égal à la somme des vecteurs $\vec{F_1}$ et $\vec{F_2}$, qui leur soit parallèle et de même sens.

3. Détermination graphique du point d'application de la résultante.

Conservons les données de l'exercice précédent. Représentons AB à l'échelle de 50 *mm* pour 1 *m* (fig. 6); les forces F_1 et F_2 à l'échelle de 1 *mm* pour 1 *kgp*.

En A, menons un vecteur $\overrightarrow{AD}$ équipollent à $\vec{F_2}$ et en B, *sur le prolongement de* F_2, un vecteur $\overrightarrow{BE}$ égal à $\vec{F_1}$ mais de sens opposé. Joignons DE qui coupe AB en C. Le point C est le point d'application de la résultante.

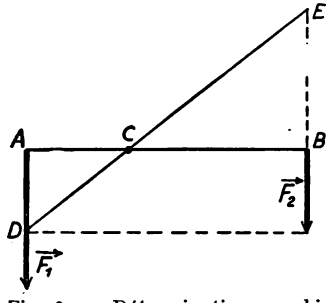


Fig. 6: — Détermination graphique du point d'application de la résultante des forces F_1 et F_2 (AD = F_2; BE = F_1).

En effet, dans les triangles semblables CAD et CBE :

$$\frac{CA}{CB} = \frac{DA}{BE}$$

d'où

$$CA \times BE = CB \times DA$$

soit : $$F_1 \times CA = F_2 \times CB.$$

C'est la relation fondamentale établie précédemment.

Sur la figure, CA mesure 18,5 *mm;* CA mesure donc en réalité :

$$18{,}5 : 50 = \mathbf{0{,}37\ m}$$

La précision du résultat dépend de l'échelle adoptée et de la précision des tracés.

4. Problème inverse : décomposer une force en deux autres parallèles et de même sens.

Problème. — *Une barre, de poids négligeable, est portée par les épaules de deux hommes* (fig. 7). *Un corps pesant* 120 *kilogrammes est suspendu à la barre, à* 0,80 *m de l'épaule de l'un des porteurs et à* 1,20 *m de celle de l'autre. Quelle est la charge de chaque porteur?*

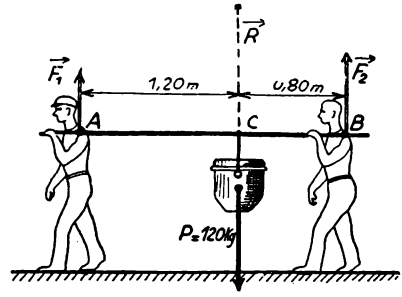


Fig. 7. — Les forces F_1, F_2, P se font équilibre. La force P est égale et opposée à la résultante R des forces F_1 et F_2.

Sur la barre sont appliqués :

1° son poids qui est négligeable,

2° en C, le poids P = 120 *kilogrammes*, force verticale dirigée de haut en bas,

3° en A et B les forces F_1 et F_2, exercées par les porteurs, forces verticales dirigées de bas en haut.

L'équilibre est réalisé si la résultante R des forces F_1 et F_2 est égale et directement opposée au poids P.

On a donc : $R = F_1 + F_2 = 120$ *kgp*

et $$\frac{F_1}{CB} = \frac{F_2}{CA} = \frac{R}{AB}.$$

D'où :

$$F_1 = R \times \frac{CB}{AB} = 120 \times \frac{0{,}8}{2} = \mathbf{48\ kgp}$$

$$F_2 = R \times \frac{CA}{AB} = 120 \times \frac{1{,}2}{2} = \mathbf{72\ kgp}$$

En vertu du principe de l'égalité de l'action et de la réaction, la barre exerce sur l'épaule du premier porteur une force égale et opposée à F_1, soit 48 *kgp*, et sur l'épaule du second une force égale et opposée à F_2, soit 72 *kgp*.

En définitive, la force P = 120 *kgp* appliquée en C, produit le même effet que deux forces parallèles et de même sens, appliquées l'une en A, l'autre en B. On exprime ce fait en disant *que la force* P *a été décomposée en deux autres parallèles et de même sens.*

Résumé.

1. *Loi fondamentale.* — La résultante de deux forces F_1 et F_2, parallèles et de même sens, appliquées aux points A et B d'un corps solide est une force R qui leur est parallèle et de même sens.
Son intensité est égale à la somme des intensités des composantes : $R = F_1 + F_2$.
Elle passe par un point C de la droite AB, situé entre les points A et B, et tel que :

$$F_1 \times CA = F_2 \times CB.$$

2. *Conséquence.* — De la relation précédente on tire : $\frac{F_1}{CB} = \frac{F_2}{AC} = \frac{R}{AB}$.

3. Ni le point d'application, ni l'intensité de la résultante ne changent lorsqu'on fait pivoter les deux forces F_1 et F_2 autour de leur point d'application.

4. — On peut remplacer une force donnée R par deux autres parallèles et de même sens, dont elle est la résultante.

Exercices.

1. Déterminer la résultante de deux forces parallèles et de même sens dans chacun des cas de figure ci-dessous :

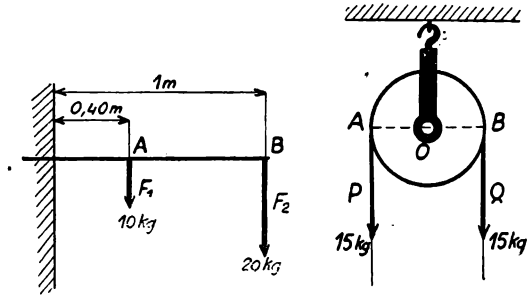


Fig. 8.

1° Par le calcul ;
2° Par une construction graphique (fig. 8).

2. La figure 9 représente une poutre reposant sur deux appuis A et B. On suppose que son poids P est concentré en son milieu G. Une charge Q agit au point D.
1° Déterminer graphiquement et par le calcul la résultante des forces P et Q.

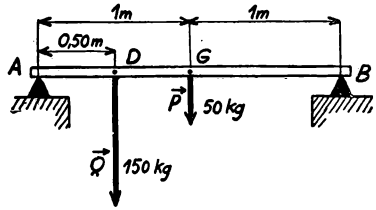


Fig. 9.

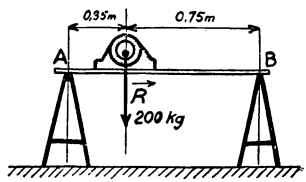


Fig. 10.

2° Remplacer cette résultante par deux forces F_A et F_B appliquées aux appuis A et B.

3. Quelles sont les charges supportées par les tréteaux du schéma de la figure 10? On négligera le poids de la planche AB

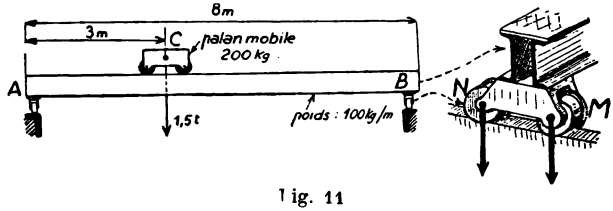


Fig. 11

4. On considère le pont roulant de la figure 11.

1° Calculer la charge supportée par chacun des galets de roulement tels que M et N lorsque la charge du palan est nulle.

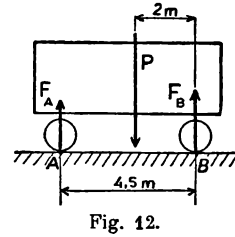


Fig. 12.

2° Quel est l'effort supplémentaire lorsque le palan soulève une charge de 1,5 *tonnes?*

5. Un wagon de marchandise complètement chargé pèse 20 500 kg. La droite d'action du poids P est disposée comme l'indique la figure 12.

Déterminer les intensités des forces exercées en A et B par les rails sur les roues. En déduire les poussées supportées aux mêmes points par les rails.

Résultante de deux forces parallèles et de sens contraires.

1. Détermination expérimentale de la résultante de deux forces parallèles et de sens contraires.

Reprenons l'appareil utilisé dans la leçon précédente et considérons les trois forces verticales de 90 *gp*, 210 *gp* et 300 *gp* qui, appliquées en trois points de la barre, la maintiennent en équilibre (fig. 1).

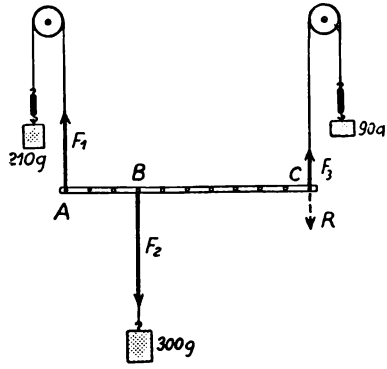


Fig. 1. — Les trois forces F_1, F_2, F_3 sont en équilibre. La force F_3 est égale et opposée à la résultante R des forces F_1 et F_2, *parallèles et de sens contraires.*

$$R = F_2 - F_1$$
$$F_1 \times CA = F_2 \times CB$$

L'une quelconque de ces forces est égale et opposée à la résultante des deux autres.

En particulier, la force F_3 de 90 *gp* est égale et opposée à la résultante R des forces F_2 de 300 *gp* et F_1 de 210 *gp*. Or, ces dernières, appliquées en A et B, sont deux forces *parallèles et de sens contraires.*

Observons que :

1° R est de même sens que F_2, la plus grande des deux forces;

2° R est égale à F_3, donc à la différence des composantes F_1 et F_2, car :

$$90 = 300 - 210.$$

3° Le point C d'application de la résultante R est *en dehors* de AB, *plus près de B que de A*, et placé de telle sorte que :

$$F_1 \times CA = F_2 \times CB.$$

Nous avons en effet : $CB = 35$ *cm;* $CA = 50$ *cm;*

et $$300 \times 35 = 210 \times 50 = 10\,500.$$

Les résultats se confirment lorsqu'on fait varier F_1, F_2 et AB, c'est-à-dire les conditions expérimentales.

D'où la loi fondamentale suivante :

La résultante de deux forces parallèles et de sens contraires appliquées en des points A et B d'un corps solide, est une force R qui leur est parallèle et qui a le sens de la plus grande des forces.

Son intensité est égale à la différence des intensités des composantes :

$$R = F_2 - F_1$$

Son point d'application C est situé en dehors du segment AB de telle sorte que les produits de chaque composante par sa distance au point C sont égaux :

$$F_1 \times CA = F_2 \times CB$$

REMARQUE. — Ainsi qu'on l'a fait pour les forces parallèles et de même sens, on montrerait que le point d'application de la résultante de deux forces parallèles et de sens contraires ne change pas lorsqu'elles pivotent, en restant parallèles, autour de leur point d'application (fig. 2).

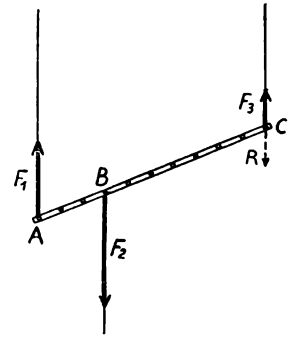


Fig. 2. — Le point d'application de la résultante ne change pas si l'on fait pivoter du même angle les forces F_1 et F_2, autour de leur point d'application.

2. La relation $F_1 \times CA = F_2 \times CB$ permet de calculer le point d'application de la résultante R.

L'égalité $F_1 \times CA = F_2 \times CB$ peut s'écrire :

$$\frac{F_2}{CA} = \frac{F_1}{CB} = \frac{F_2 - F_1}{CA - CB}$$

soit

$$\frac{F_2}{CA} = \frac{F_1}{CB} = \frac{R}{AB}$$

Cette relation permet le calcul de CA ou de CB lorsqu'on connaît les forces F_1, F_2, en grandeur et en position. Appliquons-la au système de forces parallèles et de sens contraires de la figure 3.

1° *Intensité de la résultante :*

$$R = F_1 - F_2 = 27 - 15 = \mathbf{12\ kgp}$$

2° *Point d'application de la résultante.*

Il est en dehors du segment AB, plus près de B que de A et tel que :

$$F_2 \times CA = F_1 \times CB \quad \text{ou} \quad \frac{F_1}{CA} = \frac{F_2}{CB} = \frac{R}{AB}.$$

Remplaçons les lettres par les nombres correspondants :

$$\frac{27}{CA} = \frac{15}{CB} = \frac{12}{0{,}30}$$

d'où :

$$CA = \frac{27 \times 0{,}3}{12} = \mathbf{0{,}675\ m}$$

Il suffit donc de marquer un point C à 675 *millimètres* à droite du point A et de tracer en ce point, avec le sens convenable, le vecteur qui représente la résultante R.

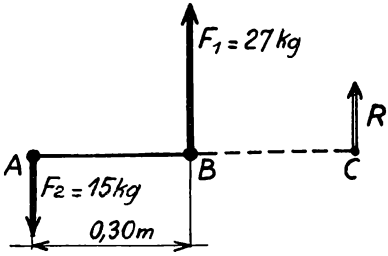


Fig. 3. — Déterminez la résultante R en appliquant la relation :

$$\frac{CA}{F_1} = \frac{CB}{F_2} = \frac{AB}{R}$$

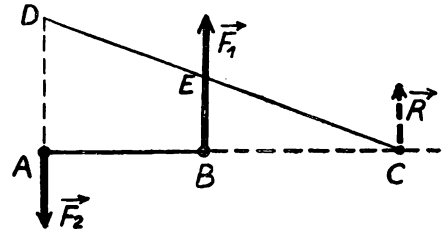


Fig. 4. — Détermination graphique du point d'application de la résultante R des forces F_1 et F_2 (AD = F_1; BE = F_2).

3. Détermination graphique du point d'application de la résultante.

Reprenons les données de l'exercice précédent.

Représentons la distance AB à l'échelle de 1 *mm* pour 1 *cm*, les forces F_1 et F_2 à l'échelle de 1 *mm* pour 1 *kgp* (fig. 4).

En A menons un vecteur équipollent à F_1. Soit son extrémité D.

En B, menons un vecteur $\vec{BE}$ de même longueur que le vecteur $\vec{F_2}$, parallèle et de sens contraire. Joignons son extrémité E au point D. La droite DE rencontre AB au point C cherché.

En effet, dans les triangles rectangles semblables CAD et CBE nous avons :

$$\frac{CB}{CA} = \frac{BE}{DA} \quad \text{ou encore} \quad \frac{CB}{CA} = \frac{F_2}{F_1}$$

on a donc bien : $F_2 \times CA = F_1 \times CB$.

Au point C, la résultante est représentée par un vecteur parallèle aux forces données, et de même sens que la plus grande F_1. Sa longueur est égale à la différence des longueurs des vecteurs $\vec{F_1}$ et $\vec{F_2}$.

4. Problème inverse : Décomposer une force R en deux autres, parallèles et de sens contraires, dont R soit la résultante.

PROBLÈME. — *Une barre de poids négligeable repose sur les arêtes de deux couteaux A et B comme l'indique la figure* 5. *Au point C, situé en dehors des appuis, on applique une charge P = 30 kgp. Quelle est la charge supportée par chacun des appuis?*

Sur la barre sont appliqués :

1° son poids qui est négligeable;

2° en C, le poids P = 30 *kgp*, force verticale dirigée vers le bas;
3° en A et B, les forces F_1 et F_2 exercées par les appuis.

Les forces F_1, F_2 et P sont en équilibre; donc la résultante R des deux premières est égale et directement opposée à P. R est donc une force verticale, dirigée vers le haut, d'intensité 30 *kgp*.

D'après l'étude qui précède, nous savons que la plus grande des composantes, soit F_1, est la plus rapprochée du point C. En outre, elle a le même sens que R. L'autre composante, F_2, est de sens contraire.

La relation : $\frac{F_1}{CB} = \frac{F_2}{CA} = \frac{R}{AB}$ permet d'achever le problème.

Les *données* sont les suivantes :

$CA = 0{,}70\ m$; $CB = 1{,}20\ m$;
$AB = CB - CA = 0{,}50\ m$; $R = 30\ kgp$

d'où : $\frac{F_1}{1{,}2} = \frac{F_2}{0{,}7} = \frac{30}{0{,}5}$

Nous obtenons successivement :

$$F_1 = \frac{1{,}2 \times 30}{0{,}5} = \mathbf{72\ kgp}$$

$$F_2 = \frac{0{,}7 \times 30}{0{,}5} = \mathbf{42\ kgp}$$

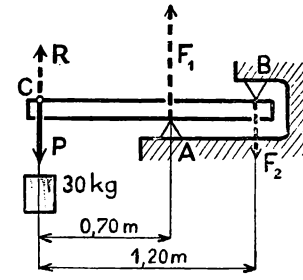


Fig. 5. — Les forces P, F_1 et F_2 sont en équilibre. La force P est égale et directement opposée à la résultante R des forces F_1 et F_2.

D'après le principe de l'égalité de l'action et de la réaction, la barre AB exerce sur ses appuis, en A et B, des forces égales et opposées respectivement aux forces F_1 et F_2.

Résumé.

1. *Loi fondamentale.* — La résultante de deux forces F_1 et F_2 parallèles et de sens contraires appliquées en deux points A et B d'un corps solide, est une force R parallèle aux composantes et de même sens que la plus grande.

Son intensité est égale à la différence des composantes.

Son point d'application C est en dehors du segment AB et tel que :

$$F_1 \times CA = F_2 \times CB$$

2. *Conséquence.* — La relation procédente s'écrit encore :

$$\frac{F_1}{CB} = \frac{F_2}{CA} = \frac{R}{AB}.$$

Elle permet de calculer CA ou CB connaisssant F_1, F_2, AB.

3. — On peut décomposer une force donnée, appliquée en un point C d'un corps solide, en deux autres forces parallèles et de sens contraires, dont elle est la résultante.

Exercices.

1. Dans le dispositif ci-dessous (fig. 6), déterminer par le calcul et graphiquement la résultante des forces F_1 et F_2.

2. Sur la figure 7 la force $F_1 = 10$ *kgp*, la force F_2 part de la valeur 5 *kgp* et croît progressivement de *kgp* en *kgp* pour atteindre la même valeur que F_1. Construire pour

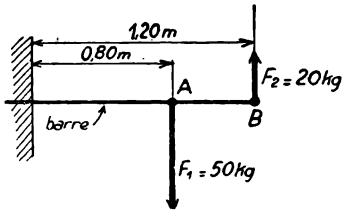


Fig. 6.

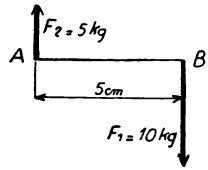


Fig. 7.

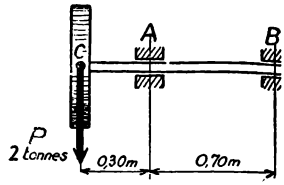


Fig. 8.

les différentes valeurs de F_2 et, sur la même figure, le point d'application C de la résultante. Où se trouve le point C quand $F_1 = F_2$?

(*Echelle des forces :* 2 *mm* pour 1 *kgp*).

3. Un volant pesant 2 *tonnes* est calé en porte-à-faux sur un arbre dont le poids est négligé devant celui du volant (fig. 8). Décomposer le poids de ce volant en deux forces agissant en A et B.

En déduire les charges supportées par deux paliers placés en A et B.

Couple. Moment d'un couple.

1. Définition et exemples.

Un couple est un système de deux forces égales, parallèles et de sens contraires, appliquées à un même corps solide.

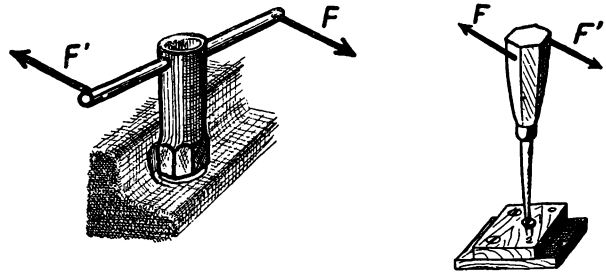


Fig. 1 et 2. — Pour serrer un écrou ou une vis, il faut exercer un **couple.**

EXEMPLES. — Un ouvrier serre un écrou à l'aide d'une clé-tube. Il exerce un couple (fig. 1). Il en est de même s'il taraude ou s'il alèse un

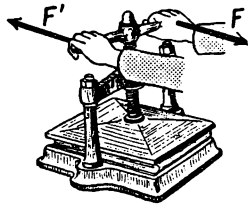


Fig. 3. — On exerce un couple, en serrant la vis d'une presse à copier.

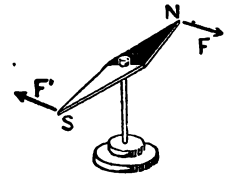


Fig. 4. — Le *couple magnétique terrestre* fait dévier l'aiguille de la boussole.

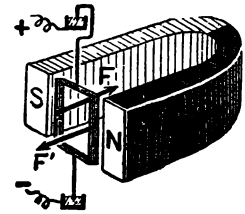


Fig. 5. — Le cadre du galvanomètre parcouru par le courant dévie sous l'action d'un *couple électromagnétique.*

trou, s'il assemble deux pièces à l'aide d'une vis (fig. 2), s'il agit sur le balancier d'une presse à copier (fig. 3).

L'aiguille d'une boussole est sollicitée par un couple dû au champ magnétique terrestre qui s'exerce sur ses pôles (fig. 4).

C'est encore un couple qui fait dévier le cadre d'un galvanomètre

parcouru par un courant électrique (fig. 5) ou qui fait tourner le rotor d'un moteur électrique.

2. Un couple n'a pas de résultante, mais il produit une rotation ou une déformation.

Si nous appliquons à un couple la règle de la composition des forces parallèles et de sens contraires, nous constatons que :

1° *un couple a une résultante nulle* ($R = F' - F = 0$).

2° *le point d'application de sa résultante est rejeté à l'infini.*

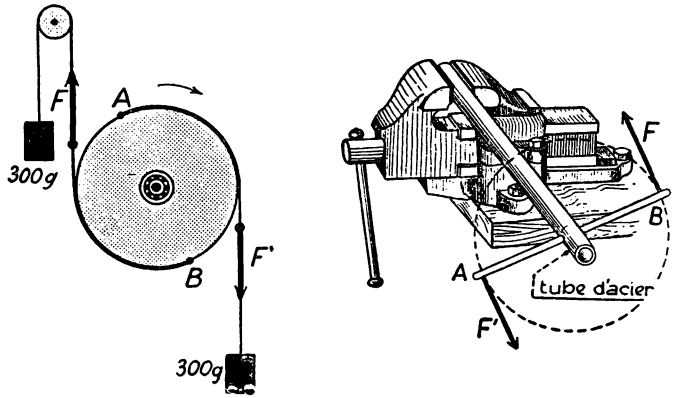


Fig. 6 et 7. — Sous l'action d'un couple (F, F') la poulie tourne, le tube se tord.

Ceci n'a évidemment aucun sens. La règle de composition de deux forces parallèles et de sens contraires ne s'applique donc pas au cas d'un couple. Il faut, par conséquent, revenir à l'expérience pour apprendre ce qui se passe.

Or, les expériences représentées figures 1, 2, 3, 4, 5, 6 mettent en évidence ce fait qu'un couple, appliqué sur un corps mobile, lui imprime un mouvement de rotation. ***Il ne constitue donc pas un système de forces en équilibre :*** on ne peut pas l'appliquer à un corps solide, ou *le supprimer* sans changer l'état extérieur de ce corps.

Ainsi, d'une part, un couple ne peut être réduit à une force unique, d'autre part, ce n'est pas un système en équilibre. Il y a donc lieu d'en faire une étude spéciale.

3. Moment d'un couple : son expression numérique.

Il est facile de reconnaître en serrant un boulon à l'aide d'une clé-tube, par exemple, que l'efficacité d'un couple croît :

a) en augmentant l'intensité des forces du couple;
b) en augmentant la distance *d* de ces forces.

DÉFINITION. — ***On appelle moment d'un couple le produit de la distance d des droites d'action des forces de ce couple par leur intensité F*** (fig. 8).

$$\mathfrak{M} = d \times F$$

Cette distance *d* s'appelle le ***bras de levier*** du couple.

Le moment $\mathfrak{M}$ est donc le produit d'une longueur par une force.

Conformément à la règle de formation des noms des unités dérivées le nom de l'*unité de moment* s'obtient en séparant par un tiret le nom de l'*unité de longueur* employée pour mesurer *d* et le nom de l'*unité de force* employée pour mesurer F.

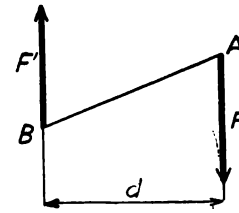


Fig. 8. — Le moment du couple (F, F') est $\mathfrak{M} = d \times F$.

EXEMPLE. — *La valeur commune des forces d'un couple est* F = 30 *kgp; son bras de levier est de* 0,80 *m. Calculer son moment* (fig. 8).

$$\mathfrak{M} = d \times F = 0{,}8 \times 30 = 24 \textbf{ mètres-kilogrammes} = 24 \textbf{ m.kg}$$

Selon les unités choisies, le moment d'un couple pourra s'exprimer : en *centimètres-kilogrammes* ***(cm. kg);*** en *millimètres-kilogrammes* ***(mm.kg);*** en *centimètres-grammes* ***(cm.g)...*** etc.

4. Couples en équilibre. Sens d'un couple.

Une barre mobile autour d'un axe fixe O est au repos dans une position horizontale (fig. 9). Appliquons-lui deux couples (F, F'), (F_1, F'_1), tels que la barre demeure horizontale : nous disons qu'ils s'*équilibrent*.

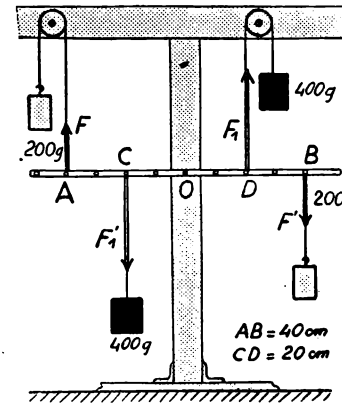


Fig. 9. — Les deux couples (F, F'), (F_1, F'_1) *se font équilibre*. Leurs moments sont égaux et de signes contraires.

DÉFINITION. — ***Deux couples, appliqués simultanément à un même corps solide, se font équilibre s'ils ne modifient pas l'état extérieur de ce corps.***

Nous vérifions, sur le dispositif expérimental, que *deux couples en équilibre tendent à faire tourner le solide en* ***sens contraires*** *et ont des moments égaux :*

$$AB \times F = CD \times F_1.$$

Un couple est donc caractérisé par *son moment* et par *son sens*. Pour préciser ce dernier nous adopterons la *convention* suivante : nous faisons choix de l'une des faces du plan du couple et nous imaginons un observateur, debout sur cette face (fig. 10 *a* et *b*), entre les deux forces. Si, pour l'observateur, les forces F et F′ tendent à faire tourner AB *dans le sens des aiguilles d'une montre*, le moment $\mathfrak{M}$ est ***négatif;*** il est ***positif*** dans le cas inverse.

Ainsi, nous exprimerons la grandeur et le sens d'un couple en considérant son moment comme une *grandeur algébrique*. Nous écrirons :

(fig. 10 *a*) *Moment du couple* (F, F′) : $\mathfrak{M} = + (d \times F)$

(fig. 10 *b*) *Moment du couple* (F, F′) : $\mathfrak{M} = - (d \times F)$

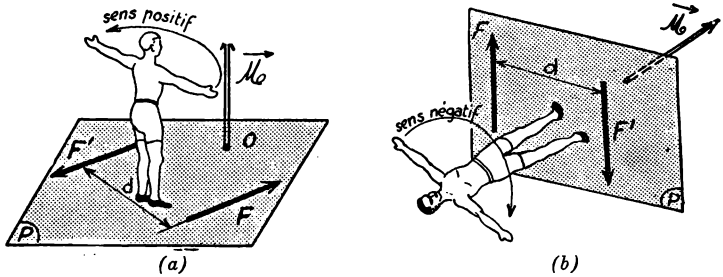


Fig. 10. — L'observateur est debout sur le plan P, entre les forces F et F′ du couple. En *(a)*, les forces F et F′ tournent en sens inverse des aiguilles d'une montre : le moment du couple est dit *positif*. En *(b)* le moment du couple (F, F′) est dit *négatif*.

5. Représentation vectorielle du moment d'un couple.

Nous représenterons le moment d'un couple à l'aide d'un vecteur défini ainsi :

1° son *origine* est un point quelconque (fig. 10);

2° sa *direction* est perpendiculaire au plan du couple;

3° son *sens* est celui qui va des pieds à la tête d'un observateur qui, debout sur le plan du couple, voit tourner le bras de levier dans le sens positif;

4° sa *longueur* est proportionnelle à sa valeur numérique.

Le vecteur-moment $\vec{\mathfrak{M}}$ ainsi obtenu définit, en grandeur et sens, le moment du couple considéré.

Remarque. — Il est évident que deux couples qui se font équilibre ont des vecteurs-moments égaux et de sens contraires.

6. Couples équivalents.

Deux couples sont équivalents lorsqu'on peut remplacer l'un par l'autre sans changer l'état extérieur du corps solide auquel on les applique.

L'appareil de la figure 11 permet de remplacer un couple donné (F,F′)

par un couple équivalent (F_1, F'_1) qui maintient la barre horizontale.

Nous constatons alors que : *deux couples sont équivalents lorsqu'ils sont de même sens et ont des moments égaux.*

On a en effet dans le cas de l'expérience :

$$20 \times 100 = 40 \times 50 = 2\,000\ cm.g$$

APPLICATION NUMÉRIQUE. — *Sur la figure 12, remplacer le couple agissant en A et B par un couple équivalent appliqué en C et D.*

1° Les deux couples ont le même sens.

2° Leurs moments sont égaux.

Soit F l'intensité commune des forces du couple cherché.

$$1{,}25 \times F = 0{,}75 \times 10 = 7{,}5$$

d'où :

$$F = \frac{7{,}5}{1{,}25} = \mathbf{6\ kgp}$$

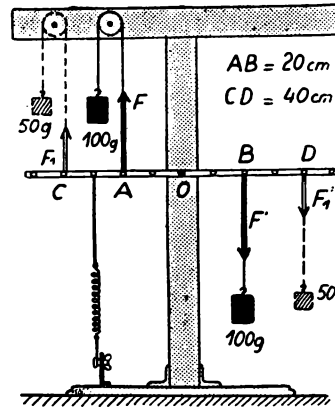


Fig. 11. — Le ressort tend à faire tourner la barre AB autour de l'axe O. Elle reste en équilibre quand on lui applique *soit* le couple de forces (F, F'), *soit* le couple de forces (F_1, F_1') : *ces deux couples sont équivalents.*

REMARQUE. — Les moments de deux couples équivalents sont représentés par le même vecteur $\overrightarrow{\mathcal{M}}$ puisqu'ils sont de même sens et de même grandeur.

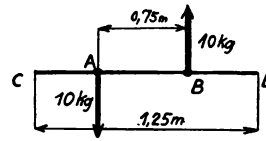


Fig. 12.

7. Applications : déplacements d'un couple.

A. ***Glissement d'un couple dans son plan.*** — Sur la barre de l'appareil de la figure 13, faisons glisser les forces d'un couple, sans faire varier leur intensité ni la longueur de leur bras de levier. La force F appliquée primitivement en A vient en A', la force F' en B'. La distance A'B' = AB. Nous constatons que la barre demeure horizontale.

On peut donc faire glisser un couple dans son plan : ce qui revient à le remplacer par un couple ayant même moment.

B. ***Rotation d'un couple dans son plan.*** — Utilisons le dispositif de la figure 14. Réglons la tension du ressort pour que le diamètre CD tracé sur le disque reste horizontal malgré l'action du couple (F, F').

Si nous appliquons le couple (F,F') en C et D, nous constatons que le diamètre reste encore horizontal.

On peut donc faire tourner un couple dans son plan : ce qui revient, encore, à le remplacer par un couple de même moment.

C. ***Transport d'un couple dans un plan parallèle.*** — C'est ce que

l'on réalise pratiquement dans la transmission du mouvement d'un moteur électrique en rotation (fig. 15).

Le couple moteur qui s'exerce sur l'induit se transmet par les broches

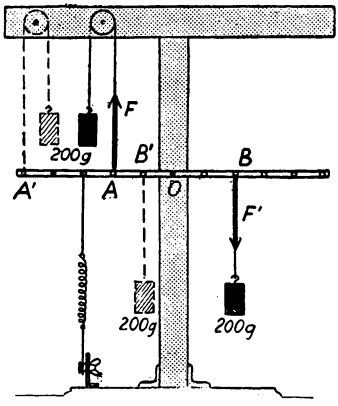


Fig. 13. — La barre AB mobile autour de l'axe O est en équilibre sous l'action du ressort et du couple (F, F') appliqué en A et B. Elle reste en équilibre si l'on fait glisser ce couple en A'C'.

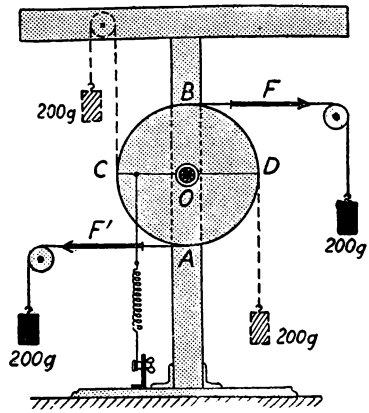


Fig. 14. — La roue mobile autour de l'axe O est en équilibre sous l'action du ressort et du couple (F, F') appliqué en A et B. Elle reste en équilibre quand on fait tourner le couple pour l'appliquer en C et D.

a et *b* du plateau calé sur l'arbre. Tout se passe comme si le plan du couple avait été transporté parallèlement à lui-même de (F, F') en (F_1, F'_1).

Ce transport d'un couple parallèlement à lui-même revient toujours à le remplacer par un autre couple ayant même vecteur-moment.

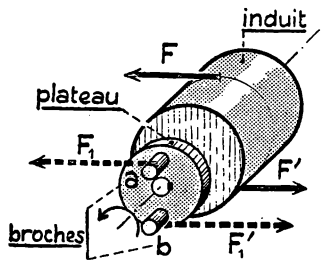


Fig. 15. — Le couple (F, F'), exercé sur l'induit par les forces électro-magnétiques est transmis par les broches *a* et *b*. Le couple (F_1, F'_1) est équivalent au couple (F, F').

8. Mesure du moment d'un couple.

C'est une opération courante dans l'industrie, notamment pour les essais de puissance des moteurs, de résistance des matériaux, etc.

On utilise des appareils que nous étudierons plus tard, tels que : *frein de Prony, frein à corde, dynamo-dynamomètre, torsiomètres*, etc...

EXEMPLE. — Un moteur électrique de 20 *chevaux-vapeur* tournant à 1 500 *tours par minute*, développe sur sa poulie un couple de 9,5 *mètres-kilogrammes*.

Un tour parallèle de l'atelier absorbe une puissance de 2 *chevaux-vapeur ;* une grande partie est transformée en chaleur par les frottements ; il n'en est communiqué à la pièce à travailler que la moitié, soit 1 *cheval-vapeur.* Si elle tourne à raison de 200 *tours par minute,* le moment du couple qui fait tourner cette pièce est d'environ 3,5 *mètres-kilogrammes.*

Résumé

1. Un couple est un système de deux forces égales, parallèles et de sens contraires appliquées en deux points d'un même solide. Un couple n'a pas de résultante. Il fait tourner ou tend à faire tourner le corps auquel il est appliqué.

2. Un couple est caractérisé par son ***sens*** et par son ***moment*** dont la valeur numérique est, par définition : $\mathcal{M} = d \times F$

d : distance des deux forces du couple ***(bras de levier)***,
F : valeur commune des forces du couple.
Le moment d'un couple peut être représenté par un vecteur, perpendiculaire au plan des deux forces.

3. Deux couples qui se font équilibre ont des moments égaux en valeur absolue et de sens contraires.

4. Deux couples sont équivalents lorsqu'on peut remplacer l'un par l'autre sans changer l'état extérieur du corps auquel ils s'appliquent. L'expérience montre que deux couples équivalents ont des moments égaux et de même signe.

5. On peut faire tourner ou glisser un couple dans son plan, ou le transporter dans un plan parallèle. Cela revient à le remplacer par un couple ayant même moment.

Exercices.

1. Sur la figure 1 la valeur commune des forces du couple est de 15 *kgp.* Le bras de levier est de 40 *cm.*
Exprimer le moment du couple en grandeur et en signe. Le représenter par un vecteur.
Quel serait le couple équivalent qu'il faudrait exercer aux extrémités d'une barre de 50 *cm?*

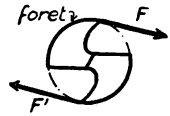


Fig. 16.

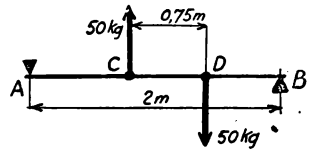


Fig. 17.

2. Le couple transmis par l'induit du moteur électrique d'une perceuse est 0,1 *m.kg.* Calculer les forces du couple équivalent qui s'exerce à la périphérie d'un foret de 10 *mm* de diamètre (fig. 16).

3. La figure 17 représente une barre soumise à l'action d'un couple. On néglige le poids de la barre.
Calculer les forces du couple, dû aux réactions des appuis A et B, qui lui fait équilibre.

Résultante d'un système de forces parallèles. Centre des forces parallèles.

1. Résultante de plusieurs forces parallèles et de même sens.

Soit à déterminer la résultante de plusieurs forces parallèles et de même sens : F_1, F_2, F_3, F_4, appliquées en des points A, B, C, D, d'un corps solide (fig. 1).

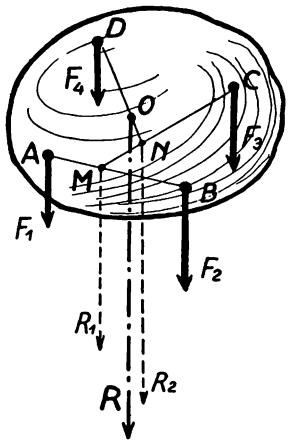


Fig. 1. — Un système de forces parallèles et de même sens admet toujours une résultante appliquée au **centre** O de ce système.

Deux quelconques des forces, F_1 et F_2 par exemple, peuvent être remplacées par leur résultante R_1 appliquée en M. Le système considéré est équivalent au système donné, mais ne comprend plus que trois forces :

$$R_1,\ F_3,\ F_4.$$

Composons de même R_1 et F_3, puis la résultante R_2 obtenue avec la force F_4. La résultante finale est équivalente au système donné. Elle a pour intensité :

$$R = F_1 + F_2 + F_3 + F_4;$$

elle est appliquée en un point O appelé ***centre des forces parallèles*** du système considéré.

REMARQUES. — 1° *La position du centre O ne dépend pas de l'ordre dans lequel on a composé les forces entre elles.* (On peut le vérifier par des constructions graphiques.)

2° *Si toutes les forces du système tournent simultanément du même angle en demeurant parallèles le centre O ne change pas.*

En effet, les points d'application M, N, des résultantes partielles R_1, R_2 ne changent pas lorsque l'orientation des forces change. Il en est donc de même du point O.

3° *Si les intensités de toutes les forces parallèles sont multipliées par un même nombre, leur centre O ne change pas.*

Car les points d'application des résultantes partielles ne changent pas.

2. Résultante de forces parallèles de sens contraires.

Considérons des forces parallèles qui agissent les unes dans un sens les autres èn sens contraire (fig. 2).

Nous pouvons former deux groupes :

1er *groupe :* celui des forces F_1, F_2, F_3 de même sens. Ce système admet une résultante R'.

2e *groupe :* celui des forces F_4, F_5 de même sens, mais opposé au sens des forces du premier groupe. Ce système admet une résultante R''.

Il reste à composer les forces parallèles et de sens contraires R' et R''.

Leur résultante R a une intensité égale à la valeur absolue de la différence :

$$R' - R''.$$

Son point O d'application est le *centre* du système étudié.

Il est indépendant de l'*ordre de composition* des forces et de leur *orientation.*

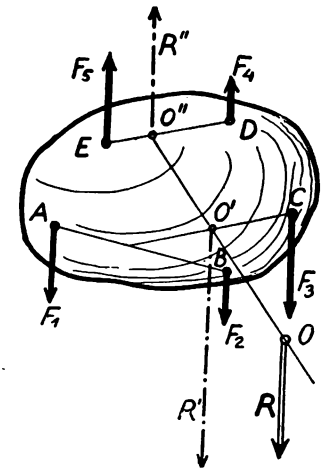


Fig. 2. — La résultante R du système des forces parallèles est appliquée au centre O de ce système.

REMARQUE. — Une fois les forces R' et R'' de sens contraires déterminées, trois cas peuvent se présenter :

1er cas. — Les forces R' et R'' ont des intensités différentes l'une de l'autre. *Le système admet une résultante* différente de zéro.

2e cas. — Les forces R' et R'' sont égales et ont des points d'application différents. *Le système se réduit à un couple.*

3e cas. — Les forces R' et R'' sont égales et directement opposées. Le système a une résultante nulle. C'est un *système de forces en équilibre.*

3. Exemple numérique.

Soit à déterminer la résultante du système de forces parallèles défini par la figure 3. *Ces forces sont situées dans un même plan.*

1° La résultante R_1 de F_1 et F_2 a pour intensité :

$$R_1 = F_1 + F_2 = 20 + 30 = 50 \ kgp$$

Son point d'application est en M, entre A et B, tel que :

$$\frac{F_1}{MB} = \frac{F_2}{MA} = \frac{R_1}{AB} \qquad \text{ou} \qquad \frac{20}{MB} = \frac{30}{MA} = \frac{50}{0,3}$$

d'où

$$MB = \frac{20 \times 0,3}{50} = 0,12\,m$$

Le système se réduit donc à deux forces : R_1 et F_3 appliquées en des points M et C distants de

$$MC = MB + BC = 0{,}12 + 0{,}78 = 0{,}90\ m.$$

2° La résultante R de R_1 et F_3 a une intensité :

$$R = R_1 + F_3 = 50 + 15 = \mathbf{65\ kgp}$$

Son point d'application N est entre M et C tel que :

$$\frac{R_1}{NC} = \frac{F_3}{MN} = \frac{R_1 + F_3}{MN + NC} \qquad \text{ou :} \qquad \frac{50}{NC} = \frac{15}{MN} = \frac{65}{0{,}90}$$

d'où :

$$CN = \frac{50 \times 0{,}9}{65} \simeq \mathbf{0{,}7\ m}$$

Le point N est le centre du système étudié.

REMARQUE. — Il est évident qu'on pourrait, de proche en proche, déterminer *graphiquement* les résultantes successives R_1, R.

La *Statique graphique* permet d'obtenir plus rapidement le résultat cherché[1].

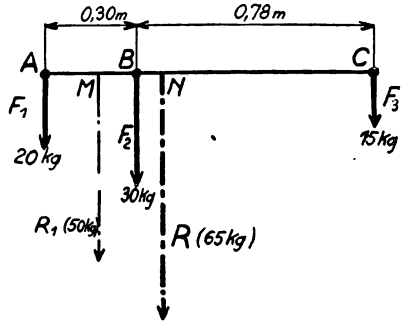


Fig. 3. — Déterminez la résultante des trois forces F_1, F_2, F_3, parallèles et de même sens.

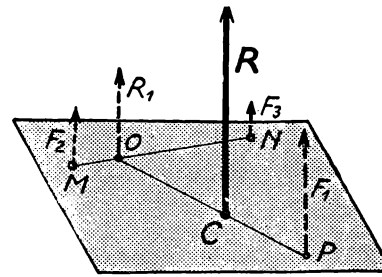


Fig. 4. — La force R est ici décomposée en trois forces appliquées en M, N, P. Ces trois forces sont parallèles et de même sens.

4. Décomposition d'une force en un système de forces parallèles.

Bornons-nous au cas où la force donnée R doit être décomposée en trois autres forces appliquées en des points M, N, P (fig. 4).

Soit C le point où la ligne d'action de la résultante perce le plan défini par les points M, N, P.

Le point d'application de R peut être transporté en ce point. Menons PC et MN qui se coupent en O. Supposons C entre O et P.

1. Voir Cours de Mécanique 4e Année des Ecoles Nationales Professionnelles.

La force R peut être remplacée par deux forces parallèles et de même sens : F_1 appliquée en P; R_1 appliquée en O.

La relation : $$\frac{F_1}{CO} = \frac{R_1}{CP} = \frac{R}{OP}$$

permet de calculer F_1 et R_1, car les autres quantités sont connues.

Si le point O se trouve entre M et N, la force R_1 se décompose à son tour en deux forces parallèles et de même sens : F_2 appliquée en M et F_3 appliquée en N.

Le problème est donc résolu. La force unique R a été décomposée en trois forces parallèles et de même sens.

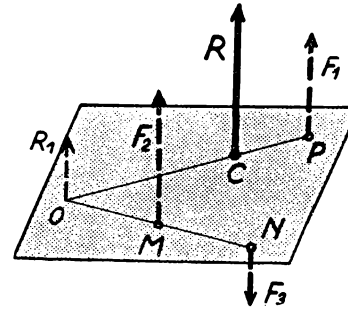


Fig. 5. — La force R a été décomposée en trois forces F_1, F_2, F_3 appliquées en M, N, P. Elles sont parallèles mais de sens variable.

REMARQUE. — Si le point O, intersection de PC et MN tombe en dehors du segment MN, la force R_1 se décompose en deux autres F_2 et F_3 parallèles et de sens contraires (fig. 5).

APPLICATION NUMÉRIQUE. — *Une force R de 120 kgp agit perpendiculairement sur une semelle triangulaire reposant sur trois appuis* (fig. 6). *Sa droite d'action passe par le point O de concours des médianes du triangle équilatéral ABC. Décomposer cette force en trois autres parallèles appliquées en A, B, C.*

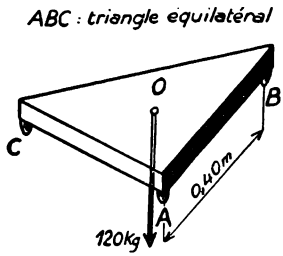


Fig. 6.

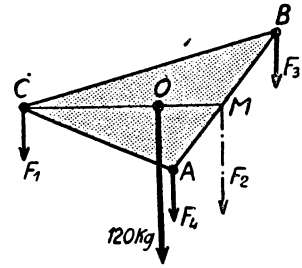


Fig. 7.

SOLUTION. — 1° La force R se décompose en deux forces parallèles F_1 et F_2 de même sens, appliquées respectivement en C et M (fig. 7).

$$\frac{F_1}{OM} = \frac{F_2}{OC} = \frac{R}{CM}$$

d'où : $$F_1 = \frac{R \times OM}{CM} = 120 \times \frac{1}{3} = \mathbf{40\ kgp}$$

$$F_2 = 120 - 40 = 80\ kgp$$

2° La force F_2 se décompose à son tour en deux forces parallèles F_3, F_4, de même sens, appliquées en A et B. Le point M étant le milieu de AB, on a :

$$F_3 = F_4 = \frac{80}{2} = \textbf{\textit{40 kgp}}$$

REMARQUE. — La semelle étant posée sur un plan horizontal, les réactions de ce plan aux points d'appuis sont égales et opposées aux forces F_1, F_2, F_3. Leur valeur commune est 40 *kgp*.

Résumé

1. Un système de forces parallèles et de même sens admet une résultante de même sens qu'elles et égale à leur somme. Son point d'application est le *centre* des forces données.

2. Lorsque plusieurs forces parallèles et de sens contraires agissent sur un corps solide, trois cas peuvent se présenter :
***a)* le système admet une résultante,**
***b)* le système se réduit à un couple,**
***c)* le système a une résultante nulle.**

3. Une force quelconque R peut toujours être décomposée en un système de forces parallèles dont elle est la résultante.

Exercices

1. Une barre MN est soumise à l'action des forces F_1, F_2, F_3 (fig. 8).
1° Calculer en grandeur, position et sens la résultante R de ces trois forces.
2° Trouver les réactions des appuis en M et N.
(La barre est de poids négligeable.)

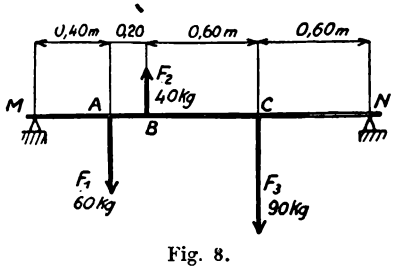


Fig. 8.

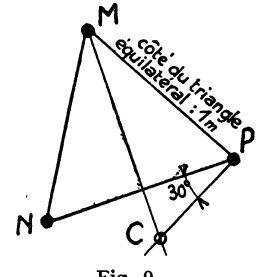


Fig. 9.

2. Sur la figure 9, MNPC sont quatre points d'un corps solide situés dans un même plan. Une force de 200 *kgp* est appliquée en C perpendiculairement au plan de figure. Décomposer cette force en trois autres appliquées en M, N, P.

Moment d'une force par rapport à un point.

I. MOMENT D'UNE FORCE PAR RAPPORT A UN POINT

1. Faits d'observation.

1° Lorsque nous fermons une porte nous lui *appliquons* un effort avec une seule main, donc une seule force, qui la fait tourner autour de ses gonds.

2° Pour élever une charge à l'aide d'un treuil, le manœuvre *applique* sur le bras de manivelle une force qui fait tourner autour de son axe le tambour du treuil.

Une force unique peut donc provoquer la rotation du corps auquel elle est appliquée.

Dans certains cas, elle *tend* seulement à la provoquer (fig. 1).

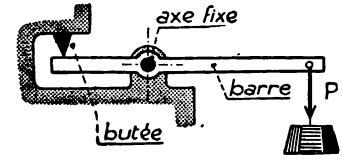


Fig. 1. — La barre tend à tourner autour de son axe sous l'action de la force P. La butée l'en empêche.

2. Expériences.

Utilisons l'appareil de la figure 2. Un ressort tendu tire en H, sur la barre AB, mobile autour de O.

Nous constatons que, pour maintenir la barre AB horizontale, il faut appuyer sur la partie OA d'autant plus fort que le point d'appui est plus rapproché de O.

a) Soit P = 300 *gp* le poids qui, placé en A, maintient la barre horizontale. Mesurons OA :

OA = 25 *cm.*

b) Enlevons le poids P et cherchons par tâtonnements en quel point C nous devons placer un poids P′ = 500 *gp* qui maintienne l'équilibre. Mesurons OC; nous trouvons : 15 *cm.*

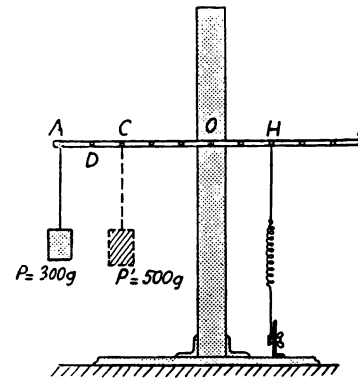


Fig. 2. — La barre est en équilibre sous l'action du poids P et du ressort. On remplace le poids P par un poids P′. Nous vérifions que :

OA × P = OC × P′.

Nous vérifions que :

$OA \times P = 25 \times 300 = 7\,500$; $OC \times P' = 15 \times 500 = 7\,500$

Donc : $OA \times P = OC \times P'$.

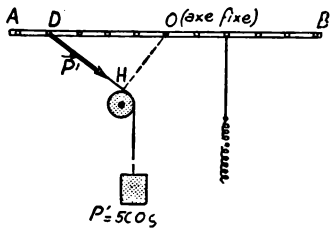


Fig. 3. — De même l'équilibre horizontal de la barre précédente est réalisé quand $OH \times P' = OA \times P$.

c) Reculons en D le point d'application de la force P' : l'équilibre est détruit. Pour le rétablir, nous pouvons modifier progressivement, à l'aide d'une poulie, la direction de l'effort appliqué au point D (fig. 3).

Mesurons OH : $OH = 15\ cm$

Or : $OH \times P' = 15 \times 500 = 7\,500$.

Une fois de plus nous trouvons que $OH \times P' = OA \times P$.

3. Définition du moment d'une force par rapport à un point.

Soit un corps solide sollicité par une force F appliquée au point A (fig. 4).

On appelle moment de la force F, par rapport au point O, le produit de la distance d de cette force au point O par son intensité F.

Nous écrirons :

$$\mathcal{M}_{(O)}F = d \times F.$$

La *distance* ***d*** est le ***bras de levier*** de la force F par rapport au point O.

Nous voyons que ce moment est nul si :

1° F est nul;

2° $d = 0$, c'est-à-dire si la droite d'action de la force F passe par le point O.

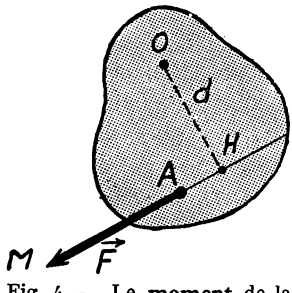


Fig. 4. — Le **moment** de la force F par rapport au point O est égal à $d \times F$.

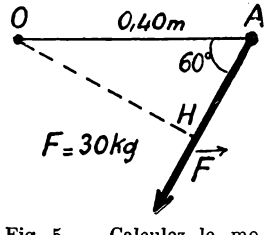


Fig. 5. — Calculez le moment de cette force par rapport au point O.

APPLICATION NUMÉRIQUE. — Sur la figure 5 la direction de la force F fait avec OA un angle de 60°. Le bras de levier est OH.

$OH = OA \sin 60° = 0{,}4 \times 0{,}866 = 0{,}34$ *mètre*

Par suite, le moment par rapport à O de la force F est :

$\mathcal{M}_{(O)}F = 0{,}34 \times 30 =$ ***10,2 mètres-kilogrammes***

REMARQUE. — Nous pouvons dire (fig. 4) que le moment $d \times F$ est proportionnel à l'aire du triangle OAM. Nous utiliserons cette remarque au paragraphe 10.

4. Le moment d'une force est une grandeur algébrique.

Considérons le dispositif expérimental de la figure 6.

Soient : Q la charge qui tend à faire tourner la barre AB.
P le poids qui lui fait équilibre.

Il est facile de vérifier que les forces P et Q ont, par rapport à O, des moments égaux en valeur absolue.

$$OA \times P = OC \times Q.$$

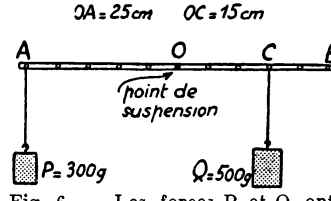


Fig. 6. — Les forces P et Q ont, par rapport à O, des moments égaux et de *signes* contraires.

Or ces forces tendent à faire tourner la barre dans des sens contraires. Pour distinguer leurs moments nous les affecterons d'un signe.

La force P tend à faire tourner la barre AB dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. *Son moment est dit positif :*

$$\mathcal{M}_{(O)}\ P = OA \times P$$

Au contraire la force Q a un *moment négatif :*

$$\mathcal{M}_{(O)}\ Q = -\ (OC \times Q).$$

5. Le moment d'une force par rapport à un point peut être représenté par un vecteur.

Soit P le plan défini par la force F et le point O (fig. 7). Nous conviendrons de représenter le moment de F par rapport à O à l'aide d'un vecteur défini comme suit :

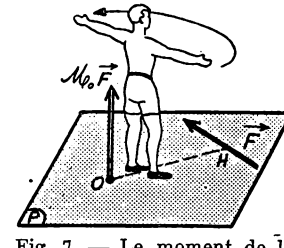


Fig. 7. — Le moment de la force F par rapport au point O peut être représenté par un **vecteur** $\vec{\mathcal{M}}$.

1° son *origine* est en O;

2° sa *direction* est perpendiculaire au plan P;

3° son *sens* est celui qui va des pieds à la tête d'un observateur qui, debout sur le plan P, voit tourner le bras de levier OH dans le sens inverse des aiguilles d'une montre;

4° sa *grandeur* est proportionnelle à la valeur numérique du moment.

II. MOMENT PAR RAPPORT A UN POINT D'UN PLAN DE LA RÉSULTANTE D'UN SYSTÈME DE FORCES SITUÉES DANS CE PLAN

A. Les forces sont parallèles.

6. Moment par rapport à un point de leur plan de la résultante de deux forces parallèles et de même sens.

Expérience. — Une barre mobile autour d'un axe fixe (fig. 8) est sollicitée par deux forces F_1, F_2, parallèles et de même sens, contenues dans un plan perpendiculaire à l'axe et qui coupe celui-ci en O.

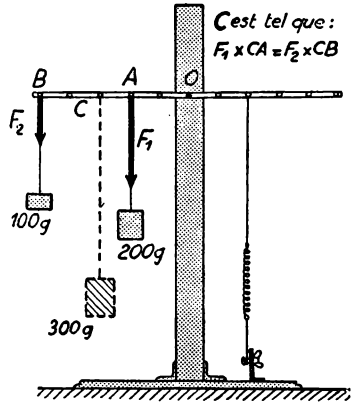


Fig. 8. — R étant la résultante des forces F_1 et F_2 :
$\mathfrak{M}_{(0)}R = \mathfrak{M}_{(0)}F_1 + \mathfrak{M}_{(0)}F_2$

L'équilibre de la barre, dans la position horizontale, est assuré par un ressort à tension réglable.

Les forces F_1 et F_2 tendent à faire tourner le corps dans le même sens autour de O. Leurs moments, de mêmes signes, sont *positifs*. Mesurons :

$F_1 = 200\ gp$ $\quad F_2 = 100\ gp$
$OA = 10\ cm$ $\quad OB = 25\ cm$

Par suite :

$\mathfrak{M}_{(0)}\ F_1 = 10 \times 200 = 2\,000\ cm.g$
$\mathfrak{M}_{(0)}\ F_2 = 25 \times 100 = 2\,500\ cm.g$

La résultante R, d'intensité

$$R = F_1 + F_2 = 300\ gp,$$

est appliquée en un point C dont on peut calculer la position. On trouve $OC = 15\ cm$.

Nous voyons que $\mathfrak{M}_{(0)}\ R = 300 \times 15 = 4\,500\ cm.g$, c'est-à-dire :

$$\mathfrak{M}_{(0)}\ R = \mathfrak{M}_{(0)}\ F_1 + \mathfrak{M}_{(0)}\ F_2.$$

Le moment de la résultante R de deux forces parallèles et de même sens, par rapport à un point situé dans leur plan, est égal à la somme des moments, par rapport à ce point, des composantes.

7. Moment par rapport à un point de leur plan de la résultante de deux forces parallèles et de sens contraires.

Expérience. — La barre précédente est soumise aux forces F_1 et F_2 parallèles et de sens contraires (fig. 9). La tension du ressort intervient pour réaliser l'équilibre.

La force $F_1 = 100\ gp$, de bras de levier $OA = 10\ cm$, tend à faire

tourner la barre dans le *sens négatif*. La force $F_2 = 200$ *gp*, de bras de levier OB = 15 *cm*, tend à la faire tourner dans le *sens positif*. Nous pouvons écrire :

$$\mathfrak{M}_{(0)}\ F_1 = -\ (10 \times 100) = -\ 1\,000\ cm.g$$
$$\mathfrak{M}_{(0)}\ F_2 = \quad 15 \times 200 = \quad 3\,000\ cm.g$$

Soit la R résultante.

$$R = F_2 - F_1 = 100\ gp.$$

Son point d'application C est tel que $F_1 \times CA = F_2 \times CB$.

Nous trouvons OC = 20 *cm*.

Exprimons le moment de R par rapport à O :

$$\mathfrak{M}_{(0)}\ R = 20 \times 100 = 2\,000\ cm.g$$

Nous voyons que :

$$\mathfrak{M}_{(0)}\ R = \mathfrak{M}_{(0)}\ F_1 + \mathfrak{M}_{(0)}\ F_2.$$

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Le moment de la résultante de deux forces parallèles (de même sens ou de sens contraires), par rapport à un point de leur plan, est égal à la somme algébrique des moments, par rapport au même point, des composantes.

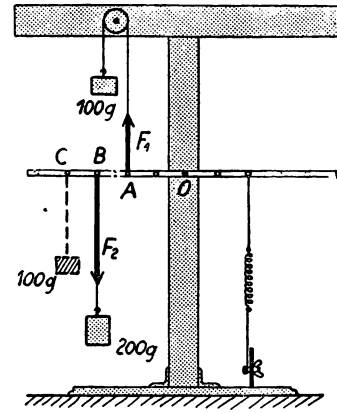


Fig. 9. — R étant la résultante des forces F_1 et F_2 :
$\mathfrak{M}_{(0)}R = \mathfrak{M}_{(0)}F_1 + \mathfrak{M}_{(0)}F_2$

8. Cas d'un système de plusieurs forces parallèles situées dans un même plan.

Le théorème précédent se généralise :

Lorsque plusieurs forces parallèles sont situées dans un même plan P, la somme algébrique de leurs moments, par rapport à un point quelconque O du plan P, est égale au moment par rapport à O de leur résultante.

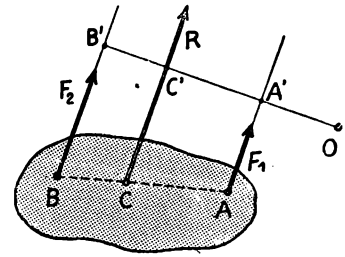


Fig. 10. — Démontrez que l'on a bien:
$\mathfrak{M}_{(0)}R = \mathfrak{M}_{(0)}F_1 + \mathfrak{M}_{(0)}F_2$.

Démontrons ce théorème (que nous avons seulement vérifié dans des cas particuliers).

1° ***Cas de 2 forces parallèles et de même sens*** (fig. 10).

Hypothèse : $\begin{cases} R = F_1 + F_2 \\ \dfrac{F_1}{CB} = \dfrac{F_2}{CA} = \dfrac{R}{AB} \end{cases}$

Conclusion : $OC' \times R = OA' \times F_1 + OB' \times F_2$

Démonstration :

$$\begin{aligned} OC' \times R &= OC' (F_1 + F_2) \\ &= OC' \times F_1 + OC' \times F_2 \\ &= (OA' + A'C') F_1 + (OB' - C'B') F_2 \\ &= OA' \times F_1 + OB' \times F_2 + (A'C' \times F_1 - C'B' \times F_2) \end{aligned}$$

Il suffit de prouver que la quantité entre parenthèses est nulle, c'est-à-dire que :

$$A'C' \times F_1 = C'B' \times F_2.$$

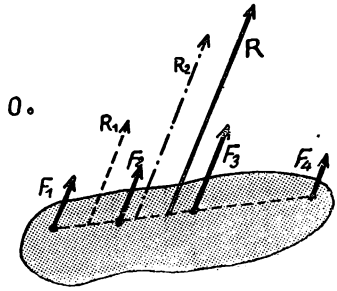


Fig. 11. — Le moment par rapport à O, de la résultante R, est égal à la somme algébrique des moments, par rapport à O, des composantes.

Or $\frac{F_1}{F_2} = \frac{CB}{CA} = \frac{C'B'}{C'A'}$ car des parallèles interceptent sur des sécantes quelconques des segments proportionnels.

Donc : $C'A' \times F_1 = C'B' \times F_2$.

Et :

$$OC' \times R = OA' \times F_1 + OB' \times F_2$$

2° Cas de plusieurs forces parallèles et de même sens (fig. 11).

Soient : F_1, F_2, F_3, F_4 quatre forces parallèles situées dans un même plan ;

O un point quelconque de ce plan.

Soit R_1 la résultante de F_1 et F_2 : $\mathcal{M}_{(O)} R_1 = \mathcal{M}_{(O)} F_1 + \mathcal{M}_{(O)} F_2$

Soit R_2 — de R_1 et F_3 : $\mathcal{M}_{(O)} R_2 = \mathcal{M}_{(O)} R_1 + \mathcal{M}_{(O)} F_3$
$= \mathcal{M}_{(O)} F_1 + \mathcal{M}_{(O)} F_2 + \mathcal{M}_{(O)} F_3$

Soit R — de R_2 et F_4 : $\mathcal{M}_{(O)} R = \mathcal{M}_{(O)} R_2 + \mathcal{M}_{(O)} F_4$
$= \mathcal{M}_{(O)} F_1 + \mathcal{M}_{(O)} F_2 + \mathcal{M}_{(O)} F_3 + \mathcal{M}_{(O)} F_4$.

REMARQUE. — Nous laissons au lecteur le soin de faire la démonstration dans le cas de 2 forces parallèles et de sens contraires, puis d'un nombre quelconque de forces parallèles, situées dans un même plan.

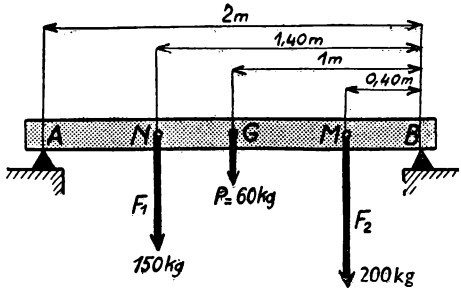


Fig. 12. — Pour déterminer la résultante R des forces parallèles F_1, F_2, P, il suffit d'écrire :
$\mathcal{M}_{(B)} R = \mathcal{M}_{(B)} F_1 + \mathcal{M}_{(B)} P + \mathcal{M}_{(B)} F_2$.

9. Application : détermination par le calcul de la résultante d'un système de forces parallèles situées dans un même plan.

Soit une poutre reposant sur 2 appuis A et B (fig. 12). Trois charges lui sont appliquées.

1° son *poids* P = 60 *kgp* que nous supposerons localisé en son milieu G;
2° une *charge verticale* $F_1 = 150$ *kgp* appliquée en N;
3° une *charge verticale* $F_2 = 200$ *kgp* appliquée en M.

Ces 3 forces sont dans un même plan et leur résultante R, située dans ce plan, a pour intensité :

$$R = 60 + 150 + 200 = \mathbf{410\ kgp}$$

Soit C son point d'application. Posons BC = x et calculons les moments des forces P, F_1, F_2, R par rapport au point B.

$$\mathfrak{M}_{(B)}\ P = 1 \times 60 = 60\ m.kg$$
$$\mathfrak{M}_{(B)}\ F_1 = 1{,}4 \times 150 = 210\ m.kg$$
$$\mathfrak{M}_{(B)}\ F_2 = 0{,}4 \times 200 = 80\ m.kg$$
$$\mathfrak{M}_{(B)}\ R = x \times 410.$$

D'après le théorème précédent :

$$x \times 410 = 60 + 210 + 80 = 350$$

d'où
$$x = \frac{350}{410} = \mathbf{0{,}85\ m}$$

B. Les forces sont concourantes.

10. Théorème de Varignon.

Lorsque plusieurs forces concourantes sont situées dans le même plan P, la somme algébrique de leurs moments, par rapport à un point quelconque O du plan P, est égale au moment par rapport à O de leur résultante.

Démontrons ce théorème dans le cas de 2 forces concourantes. Plaçons le point O de telle sorte que la direction AO soit à l'extérieur de l'angle formé par les directions des forces F_1 et F_2 (fig. 13). Les moments, par rapport à O, des composantes sont alors de même signe, *positifs* dans le cas de figure.

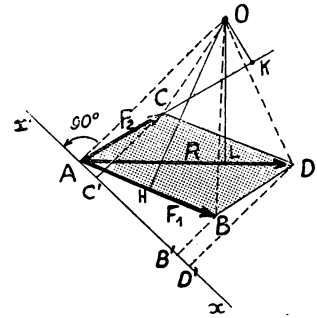


Fig. 13. — Le moment par rapport à O, de la résultante R, est égal à la somme algébrique des moments par rapport à O des composantes F_1 et F_2.

Sur la droite $x'x$, perpendiculaire en A à OA, projetons les sommets du parallélogramme des forces. Nous pouvons écrire :

$$\mathfrak{M}_{(o)}\ F_1 = OH \times F_1 = 2 \text{ aires } OAB = OA \times AB'$$
$$\mathfrak{M}_{(o)}\ F_2 = OK \times F_2 = 2 \text{ aires } OAC = OA \times AC'$$
$$\mathfrak{M}_{(o)}\ F_1 + \mathfrak{M}_{(o)}\ F_2 = OA(AB' + AC').$$

Mais AC' = B'D', donc :

$$\mathfrak{M}_{(o)}\ F_1 + \mathfrak{M}_{(o)} F_2 = OA(AB' + B'D')$$
$$= OA \times AD' = 2 \text{ aires } OAD$$
$$= \mathfrak{M}_{(o)} R$$

REMARQUE 1. — Dans le cas où la direction AO est à l'intérieur de l'angle BAC formé par les composantes, la démonstration se conduit comme dans le cas précédent en tenant compte des signes différents des moments.

REMARQUE 2. — Lorsque le système comprend plus de 2 forces situées dans un même plan, la démonstration du théorème se conduit comme dans le cas de plusieurs forces parallèles (paragraphe 8).

11. Cas particulier : la somme algébrique des moments, par rapport à un point, des forces considérées est nulle.

Soit un système de forces *parallèles* ou *concourantes* situées dans un même plan P. Supposons que la somme algébrique de leurs moments par rapport à un point donné O du plan P soit nulle. Le moment par rapport à O de leur résultante R est nul aussi : $\mathfrak{M}_{(o)}\ R = O$.

Or $\mathfrak{M}_{(o)}\ R$ = bras de levier $\times$ R.

Deux cas peuvent alors se présenter :

1° R = O : *le système considéré est en équilibre ;*

2° le bras de levier de la force R est égal à O : *la résultante R passe donc par le point donné O.*

REMARQUE. — Il est évident que *si un système de forces situées dans un même plan est en équilibre, la somme algébrique de leurs moments par rapport à un point quelconque de ce plan est toujours nulle puisque la résultante R est nulle.*

Résumé.

1. On appelle moment d'une force F par rapport à un point O le produit de la distance *d* de cette force au point O par son intensité F.

$$\mathfrak{M}_{(o)}\boldsymbol{F} = \boldsymbol{d} \times \boldsymbol{F}$$

2. Le moment d'une force est une grandeur algébrique. On peut le représenter par un vecteur.

3. Lorsque plusieurs forces parallèles ou concourantes sont situées dans un même plan P, la somme algébrique de leurs moments, par rapport à un point quelconque de ce plan, est égale au moment de leur résultante par rapport à ce point.

4. Si le système des forces considérées est *en équilibre*, la somme algébrique de leurs moments par rapport à un point quelconque de leur plan est nulle.

Exercices.

1. On donne un couple (F, F') de bras de levier *d*. Soit O un point pris dans son plan. Démontrer que la somme algébrique des moments par rapport à O des forces du couple est indépendante de la position de ce point.

Expliquer alors pourquoi il est indifférent de préciser l'origine du vecteur qui représente le moment du couple.

2. Une poutre horizontale AB est encastrée dans un mur (fig. 14). Elle est sollicitée par une charge verticale de 20 *kgp* dont le point d'application varie de C en A.

1° Calculer le moment $\mathfrak{M}$ de cette force, par rapport au point B, lorsque le bras de levier est CB, BA, x.

2° Dresser le diagramme des variations de $\mathfrak{M}$ lorsque le bras de levier varie entre CB et BA (valeurs de x en abscisses; valeurs de $\mathfrak{M}$ en ordonnées).

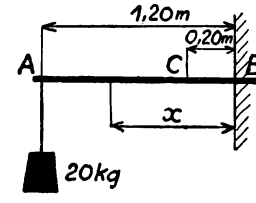


Fig. 14.

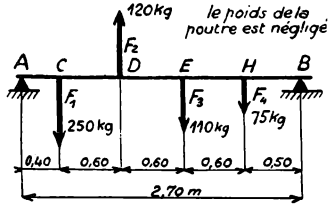


Fig. 15.

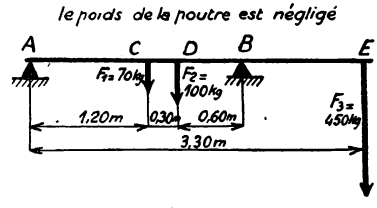


Fig. 16.

3. Calculer la résultante des charges supportées par la poutre AB reposant sur deux appuis (fig. 15).

4. Même question pour la poutre AB de la figure 16. Les appuis A et B sont-ils convenablement placés? Modifier s'il y a lieu.

5. On considère la grue potence de la figure 17.

1° Remplacer les deux forces de 500 *kgp* par leur résultante dont on précisera la droite d'action.

2° A quelle distance de AB se trouve la droite d'action de la résultante des charges appliquées?

3° Si le palier A n'existait pas, quelle force horizontale faudrait-il appliquer en ce point pour empêcher la potence de pivoter autour de B? Quelle est alors l'utilité du palier?

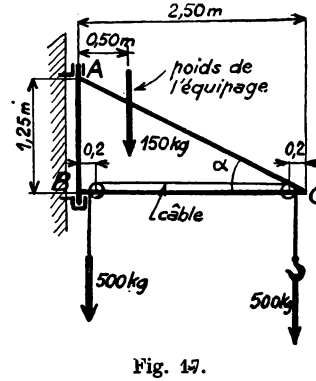


Fig. 17.

Moment d'une force par rapport à un axe ou à un plan.

I. — MOMENT PAR RAPPORT A UN AXE

1. Moment d'une force par rapport à un axe.

1er CAS. — ***La force F est dans un plan P perpendiculaire à l'axe de rotation.***

Considérons une manivelle de machine à vapeur (fig. 1). Soit F l'effort, que nous supposerons *localisé* au point A, transmis par la bielle au maneton. La force F est dans un plan P qui coupe perpendiculairement l'axe $x'x$ au point O. Par définition, *le moment de la force F, par rapport à l'axe x'x, est égal à son moment par rapport au point O.*

$$\mathfrak{M}_{(x'x)}\,F = OH \times F.$$

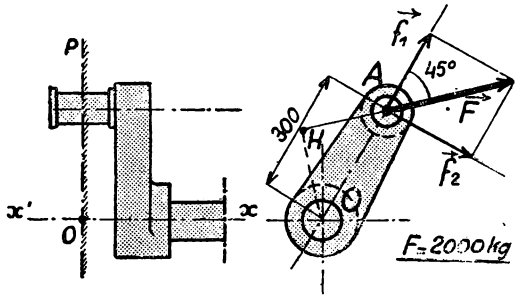


Fig. 1. — Le moment par rapport à $x'x$ de la force F située dans le plan P est : $\mathfrak{M}_{(xx')}F = OH \times F$.

2e CAS. — ***La force F est quelconque par rapport à l'axe.***

Soit une force F appliquée au point A d'un corps mobile autour d'un axe $x'x$ (fig. 2).

Menons par A le plan P perpendiculaire à $x'x$. Projetons orthogonalement la force F :

sur le plan P, suivant f_1

sur la parallèle Ay à $x'x$, suivant f_2.

Les forces f_1 et f_2 peuvent être substituées à F qui est leur résultante.

De ces deux forces, f_1 seule tend à produire une rotation autour de $x'x$. Son moment est $OK \times f_1$.

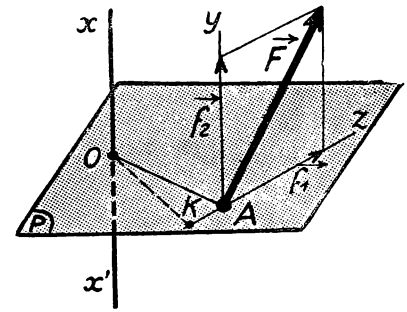


Fig. 2. — Par définition : $\mathfrak{M}_{(xx')}F = \mathfrak{M}_{(O,f_1} = OK \times f_1$.

Par définition : ***le moment de la force F par rapport à l'axe x'x est égal au moment de sa projection — sur un plan perpendiculaire à x'x — par rapport au point de rencontre de l'axe et du plan.***

$$\mathcal{M}_{(x'x)}F = \mathcal{M}_{(o)}f_1 = OK \times f_1.$$

2. Moment par rapport à un axe de la résultante d'un système de forces concourantes.

Soient 2 forces F_1 et F_2 appliquées au point A d'un corps solide mobile autour de l'axe $x'x$ (fig. 3). Un plan P perpendiculaire à cet axe le coupe en O.

Construisons le parallélogramme des forces ABCD. Il se projette perpendiculairement au plan P suivant le parallélogramme *abcd*. Par suite, *le vecteur* $\overrightarrow{ac}$ *projection du vecteur* $\overrightarrow{AC}$ *n'est autre que la résultante r des projections* f_1 *et* f_2 *des forces* F_1 *et* F_2.

D'après la définition du moment d'une force par rapport à un axe, nous pouvons écrire :

$$\mathcal{M}_{(x'x)}\ F_1 = \mathcal{M}_{(o)}f_1$$
$$\mathcal{M}_{(x'x)}\ F_2 = \mathcal{M}_{(o)}f_2$$
$$\mathcal{M}_{(x'x)}\ R = \mathcal{M}_{(o)}r.$$

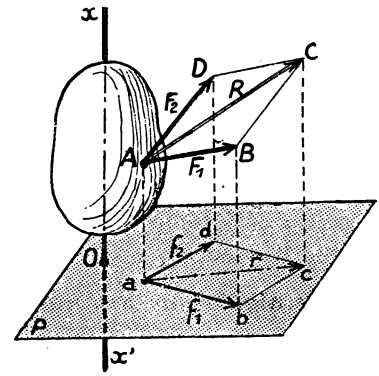


Fig. 3. — Les forces concourantes F_1 et F_2 ont pour résultante R

$$\mathcal{M}_{(x'x)}R = \mathcal{M}_{(x'x)}F_1 + \mathcal{M}_{(x'x)}F_2.$$

Mais d'après le théorème de Varignon :

$$\mathcal{M}_{(o)}f_1 + \mathcal{M}_{(o)}f_2 = \mathcal{M}_{(o)}r$$

Donc :

$$\mathcal{M}_{(x'x)}F_1 + \mathcal{M}_{(x'x)}F_2 = \mathcal{M}_{(x'x)}R.$$

Le même raisonnement s'étend au cas d'un nombre quelconque de forces concourantes, qu'elles soient ou non situées dans un même plan, d'où le *théorème :*

Le moment par rapport à un axe de la résultante de plusieurs forces concourantes est égal à la somme algébrique des moments, par rapport à cet axe, des composantes.

3. Moment par rapport à un axe de la résultante d'un système de forces parallèles.

Soit R la résultante de 2 forces F_1 et F_2 parallèles et de même sens, appliquées aux points A et B d'un corps solide mobile autour de l'axe $x'x$ (fig. 4).

Projetons F_1, F_2, R sur le plan P perpendiculaire en O à $x'x$. Le vecteur $\vec{cl}$, projection de R sur P, *est la résultante r des forces* f_1 *et* f_2 [1].

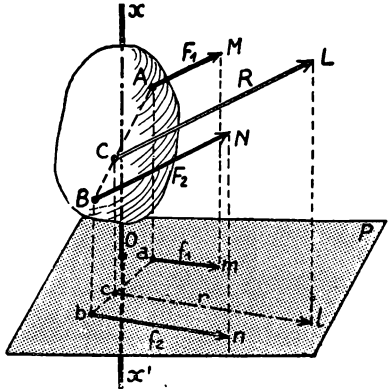


Fig. 4. — Les forces parallèles F_1 et F_2 ont pour résultante R :

$$\mathfrak{M}_{(x'x)}R = \mathfrak{M}_{(x'x)}F_1 + \mathfrak{M}_{(x'x)}F_2.$$

Comme précédemment nous écrirons :

$$\mathfrak{M}_{(x'x)}F_1 = \mathfrak{M}_{(o)}f_1$$
$$\mathfrak{M}_{(x'x)}F_2 = \mathfrak{M}_{(o)}f_2$$
$$\mathfrak{M}_{(x'x)}R = \mathfrak{M}_{(o)}r$$

Mais

$$\mathfrak{M}_{(o)}r = \mathfrak{M}_{(o)}f_1 + \mathfrak{M}_{(o)}f_2$$

Donc

$$\mathfrak{M}_{(x'x)}F_1 + \mathfrak{M}_{(x'x)}F_2 = \mathfrak{M}_{(x'x)}R.$$

Si les 2 forces F_1 et F_2 étaient de sens contraires le raisonnement serait identique et nous pourrions l'étendre de proche en proche au cas d'un nombre quelconque de forces parallèles. Nous en concluons que :

Le moment par rapport à un axe de la résultante de plusieurs forces parallèles est égal à la somme algébrique des moments, par rapport à cet axe, des composantes.

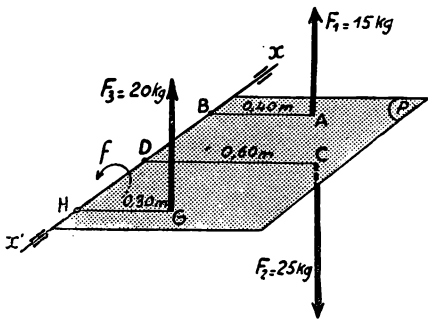


Fig. 5.

4. Application numérique.

Considérons un système de forces parallèles F_1, F_2, F_3 perpendiculaires à l'axe $x'x$ (fig. 5).

Soit P le plan mené par l'axe perpendiculairement à leur direction. Nous pouvons supposer que toutes les forces ont leur point d'application dans ce plan. Leur résultante R, qui leur est parallèle, a pour intensité :

$$R = F_1 + F_3 - F_2 =$$
$$= 15 + 20 - 25 = \mathbf{10\ kgp}$$

Elle est *dirigée vers le haut* et est à une distance x de l'axe $x'x$.

Adoptons comme sens positif de rotation celui de la flèche f, et exprimons les moments de toutes les forces par rapport à l'axe :

$$\mathfrak{M}_{(x'x)}F_1 = 0{,}4 \times 15 = 6m.kg$$
$$\mathfrak{M}_{(x'x)}F_2 = -(0{,}6 \times 25) = -15m.kg$$
$$\mathfrak{M}_{(x'x)}F_3 = 0{,}3 \times 20 = 6\ m.kg$$
$$\mathfrak{M}_{(x'x)}R = x \times R$$

1. Nous laissons à l'élève le soin de le démontrer.

D'après le théorème précédent :

$$x \times R = 6 - 15 + 6 = -3\ m.kg$$

Le moment de la force R est donc négatif, mais comme cette force est dirigée vers le haut, sa ligne d'action rencontre nécessairement le plan P ***à gauche*** *de l'axe x'x.*

Son bras de levier est : $x = \frac{3}{10} = 0{,}3\ m$

REMARQUE. - Ce calcul ne permet pas de trouver le point où la ligne d'action de la résultante perce le plan P, mais seulement la distance qui le sépare de l'axe considéré.

II. MOMENT PAR RAPPORT A UN PLAN

5. Moment d'une force par rapport à un plan qui lui est parallèle.

Soit une force F *parallèle* à un plan P (fig. 6).

Par définition ***le moment de la force F par rapport au plan P est égale au produit de la distance d de cette force au plan P, par son intensité.***

$$\mathcal{M}_{(P)}F = d \times F.$$

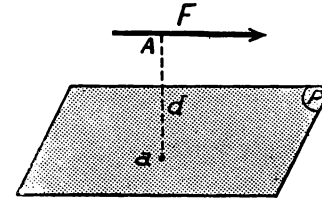


Fig. 6. — Par définition : $\mathcal{M}_{(P)}F = d \times F$.

6. Moment de la résultante d'un système de forces parallèles par rapport à un plan qui leur est parallèle.

Considérons 2 forces parallèles et de sens contraires F_1 et F_2, appliquées en des points A et B et parallèles au plan P (fig. 7).

Leur résultante $R = F_2 - F_1$ est appliquée en un point C tel que :

$$F_1 \times CA = F_2 \times CB.$$

Abaissons les perpendiculaires A*a*, B*b*, C*c* sur le plan P. D'après la définition du moment d'une force par rapport à un plan nous pouvons écrire :

$$\mathcal{M}_{(P)}F_1 = Aa \times F_1$$
$$\mathcal{M}_{(P)}F_2 = Bb \times F_2$$
$$\mathcal{M}_{(P)}R = Cc \times R.$$

Pour distinguer les signes des moments nous conviendrons d'un sens positif. Par exemple, pour l'observateur de la figure, la force F_2 tend à faire tourner son bras de levier B*b* dans le sens inverse des aiguilles d'une montre autour de *ab*; son

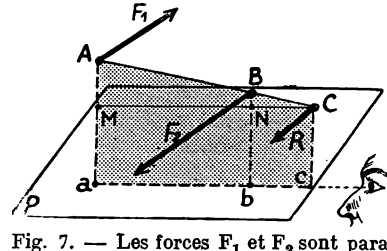


Fig. 7. — Les forces F_1 et F_2 sont parallèles entre elles et parallèles au plan P. Leur résultante est R :

$$\mathcal{M}_{(P)}R = \mathcal{M}_{(P)}F_1 + \mathcal{M}_{(P)}F_2.$$

moment est dit positif. Au contraire, le moment de la force F_1 est dit *négatif*.

Nous allons démontrer que : ***le moment de la résultante R par rapport au plan P est égal à la somme algébrique des moments, par rapport au même plan, des composantes.***

Il suffit de démontrer que :

$$R \times Cc = F_2 \times Bb - F_1 \times Aa$$

ou $$(F_2 - F_1)\, Cc = F_2 \times Bb - F_1 \times Aa.$$

Cette égalité peut s'écrire :

$$F_1(Aa - Cc) = F_2(Bb - Cc).$$

Par le point C menons CM parallèle à *ca*

$$Aa - Cc = Aa - Ma = AM$$
$$Bb - Cc = Bb - Nb = BN$$

Il faut maintenant prouver que

$$F_1 \times AM = F_2 \times BN \quad \text{ou} \quad \frac{F_1}{F_2} = \frac{BN}{AM}$$

Or $\frac{F_1}{F_2} = \frac{CB}{CA}$ et dans les triangles semblables CBN et CAM $\frac{CB}{CA} = \frac{CN}{CM} = \frac{NB}{MA}$; donc $\frac{F_1}{F_2} = \frac{NB}{MA}$

La propriété est démontrée dans le cas de 2 forces parallèles. On l'étendrait sans peine au cas d'un nombre quelconque de forces parallèles.

REMARQUE. — Nous utiliserons le théorème pour le calcul du centre de gravité d'un corps.

7. Cas où la somme algébrique des moments des forces données est nulle.

Lorsque la somme algébrique des moments des forces d'un système, par rapport à un axe ou à un plan, est nulle, le moment $\mathfrak{M}$ de leur résultante R, par rapport à cet axe ou à ce plan, est également nul.

Deux cas sont alors possibles :

1er CAS. — R = O : *le système des forces données est alors en équilibre.*

2e CAS. — Bras de levier de la force R est égal à O : *la ligne d'action de la force R rencontre alors l'axe ou est contenue dans le plan donné.*

Réciproquement : *si un système de forces concourantes ou parallèles données est en équilibre* (résultante nulle)

1° *la somme algébrique de leurs moments par rapport à un axe quelconque est nulle ;*

2° *la somme algébrique de leurs moments par rapport à un plan qui leur est parallèle est nulle, si ces forces sont parallèles entre elles.*

8. Application numérique : calcul des réactions qui sollicitent une poutre reposant sur deux appuis.

Considérons une poutre chargée comme l'indique la figure 8. Elle repose sur les arêtes A et B de deux appuis. On pourrait supprimer ces appuis sans que la poutre cesse d'être en équilibre, à condition d'exercer en A et B des forces R_A, R_B, verticales, et d'intensités convenables. Ces forces sont appelées les ***réactions*** des appuis.

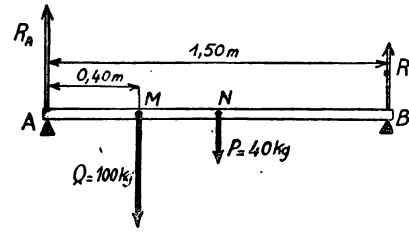


Fig. 8.

Le système des forces P, Q, R_A, R_B, est en équilibre; donc la somme algébrique des moments de toutes ces forces par rapport à un axe quelconque est nulle.

Choisissons comme axe l'arête de l'appui A, perpendiculaire au plan de figure.

$$\mathfrak{M}_{(A)}R_A + \mathfrak{M}_{(A)}Q + \mathfrak{M}_{(A)}P + \mathfrak{M}_{(A)}R_B = 0.$$

La force R_A passe par A, son moment par rapport à cet axe est nul : $\mathfrak{M}_{(A)}R_A = 0$. Nous pouvons donc écrire :

$$-(AM \times Q) - (AN \times P) + \mathfrak{M}_{(A)}R_B = 0$$

ou

$$\mathfrak{M}_{(A)}R_B = 0{,}4 \times 100 + 0{,}75 \times 40 = 70\ m.kg$$

Cette égalité nous montre que le moment par rapport à A de la force R_B est ***positif***. Cette force est donc dirigée comme l'indique la figure. De plus :

$$R_B \times AB = 70\ m.kg \qquad \text{d'où} \qquad R_B = \frac{70}{1{,}5} \simeq \textbf{46,6 kgp}$$

REMARQUE 1. — Si nous avions pris l'arête de l'appui B, nous aurions, de la même manière, calculé la réaction R_A. On trouve : $R_A = \textbf{93,3 kgp}$.

REMARQUE 2. — Nous pouvons vérifier que la résultante des réactions est égale et opposée à la résultante des charges appliquées.

REMARQUE 3. — Le calcul précédent revient à exprimer que la somme algébrique des moments des forces R_A, Q, P, R_A, par rapport à *un point* de leur plan, est nulle.

Résumé.

1. Le moment d'une force F, par rapport à un axe $x'x$, est égal au moment de sa projection — sur un plan perpendiculaire $x'x$ — par rapport au point de rencontre O de l'axe et du plan.

2. Le moment par rapport à un axe, de la résultante d'un système de forces parallèles ou concourantes, est égal à la somme algébrique des moments, par rapport à cet axe, des composantes.

3. Le moment d'une force F, par rapport à un plan P qui lui est parallèle, est égal au produit $d \times F$ de la distance de cette force au plan P par son intensité.

4. Lorsque plusieurs forces parallèles sont parallèles à un même plan P, le moment par rapport à ce plan de leur résultante est égal à la somme algébrique des moments, par rapport au même plan, des composantes.

5. Quand le système de forces considéré est en équilibre, ces sommes algébriques sont nulles.

Exercices.

1. Sur la figure 1, calculer la valeur numérique du moment de la force F par rapport à l'axe de rotation.

2. Même question pour la force F des figures 9 et 10.

3. Sur la figure 11 la force F tend à faire tourner l'axe $x'x$ dans le sens indiqué par la flèche. Calculer l'intensité de la force F' qui, faisant un angle de 45° avec la tangente en N, aurait même moment que la force F par rapport à l'axe de rotation.

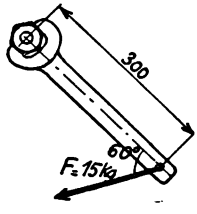


Fig. 9.

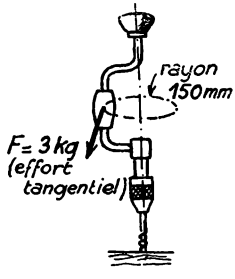


Fig. 10.

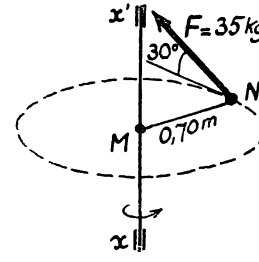


Fig. 11.

4. Au point A d'un levier de frein d'automobile (fig. 12) on exerce un effort F = 12 *kgp*. Quel effort F' faut-il appliquer en B pour que les moments par rapport à l'axe soient égaux et de signes contraires?

5. Soient un système de forces parallèles F_1, F_2, F_3 (fig. 13) et un plan P qui leur est parallèle. A quelle distance du plan P se trouve la droite d'action de la résultante?

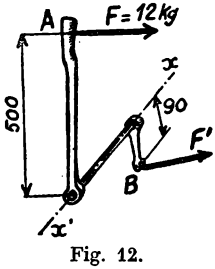


Fig. 12.

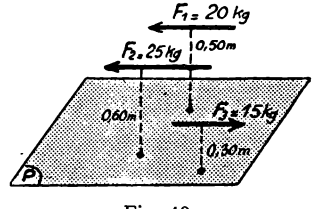


Fig. 13.

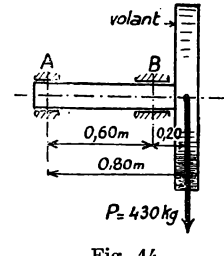


Fig. 14.

6. Calculer les réactions des paliers A et B dans le dispositif de la figure 14.

7. Compléter les exercices 3 et 4 de la leçon précédente par le calcul des réactions des appuis A et B.

Composition des couples.

Composer deux couples appliqués à un corps solide, c'est les remplacer par un couple unique qui ne modifie pas l'état extérieur de ce corps.

1. Composition de deux couples de même sens situés dans un même plan.

Expérience. — *a*) Sur une barre mobile autour d'un axe O (fig. 1), faisons agir deux couples de même sens (F_1, F'_1) et F_2, F'_2).

Équilibrons l'action, sur la barre, de ces deux couples, à l'aide d'un ressort.

Nous avons vu qu'on peut remplacer un couple par un couple équivalent.

En particulier, remplaçons le couple (F_2, F'_2) par un couple (F_3, F_3') de même moment (fig. 2). Ce couple F_3, F'_3) a pour bras de levier AB = 15 *cm;* l'intensité F_3 des forces qui le composent doit être telle que :

$$AB \times F_3 = CD \times F_2$$
$$15 \times F_3 = 10 \times 90$$

D'où :

$F_3 = 900 : 15 = 60$ *gp*

Les forces F_1, F_3; F'_1, F'_3 qui agissent aux points A et B de la barre admettent en ces points des résultantes R et R' égales à leur somme :

$R = R' = 200 + 60$
$= 260$ *gp*

La barre est donc soumise au couple (R, R') qui remplace les deux couples (F_1, F'_1), F_2, F'_2).

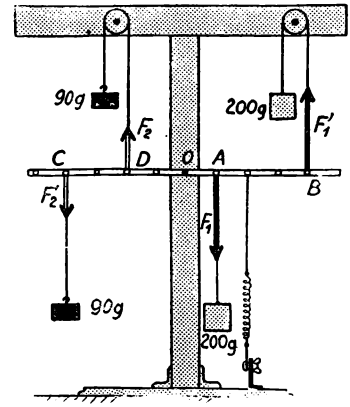


Fig. 1. — La barre est soumise aux deux couples de *même sens situés dans un même plan :* (F_1, F'_1) et F_2, F'_2). Le ressort l'empêche de tourner autour de l'axe O.

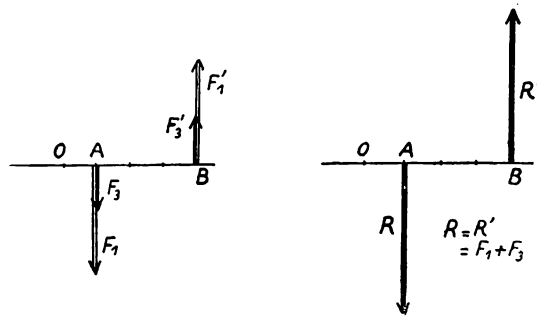


Fig. 2. — Le couple (F_2, F'_2) de la figure 1 peut être remplacé par un couple de même moment (F_3, F'_3), appliqué en A et B. Le moment du *couple résultant* (R, R') est égal à la somme des moments des *couples composants.*

Le couple (R, R') est le *couple résultant*. Les couples (F, F'), F_1, F'_1) sont les *couples composants*.

b) *Le moment du couple résultant est égal à la somme des moments des couples composants.*

En effet, exprimons les moments des différents couples :

Couple (R, R') : $\mathfrak{M} = 15 \times 260 = 3\,900$ *cm.g*

Couple (F_1, F'_1) : $\mathfrak{M}_1 = 15 \times 200 = 3\,000$ *cm.g*

Couple (F_2, F'_2) : $\mathfrak{M}_2 = 10 \times 90 = 900$ *cm.g*

D'où : $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2$.

2. Composition de deux couples de sens contraires situés dans le même plan.

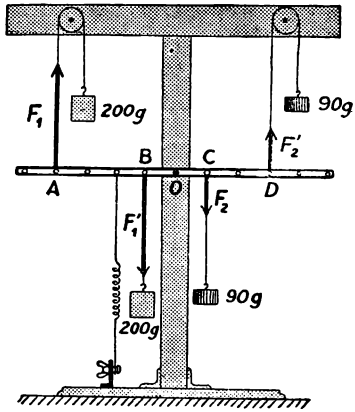


Fig. 3. — La barre est soumise aux deux couples de *sens contraires situés dans un même plan* : (F_1, F'_1) et (F_2, F'_2). Le ressort l'empêche de tourner autour de l'axe O.

EXPÉRIENCE. — Sur la figure 3 le couple (F_1, F'_1) a un moment négatif :

$$\mathfrak{M}_1 = -(15 \times 200) = -3\,000 \text{ cm.g}$$

Le couple (F_2, F'_2) a un moment positif :

$$\mathfrak{M}_2 = 10 \times 90 = 900 \text{ cm.g}$$

La tension du ressort est réglée de telle sorte que la barre demeure horizontale.

L'équilibre n'est pas troublé si l'on remplace le couple (F_2, F'_2) appliqué en C et D par un autre de même moment (F_3, F'_3) appliqué en A et B (fig. 4).

Comme précédemment $F_3 = 60$ *gp*

La barre A B est soumise en A à une force :

$$R = 200 - 60 = 140 \text{ gp}$$

et en B à une force parallèle, de sens contraire :

$$R' = 200 - 60 = 140 \text{ gp}$$

Le couple (R, R') est le couple résultant.

Nous vérifions, comme précédemment, que *son moment* $\mathfrak{M}$ *est égal à la somme algébrique des moments des couples composants.*

On a, en effet :

$$\mathfrak{M} = -(140 \times 15) = -2\,100 \text{ cm.g}$$

D'où : $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2$.

CONCLUSION. — ***Deux couples situés dans un même plan peuvent être remplacés par un couple unique ou couple résultant, dont le moment est égal à la somme algébrique des moments des couples composants.***

3. Composition de deux couples situés dans des plans parallèles.

Nous avons vu que, sans rien changer à l'état extérieur du corps auquel il est appliqué, on peut déplacer un couple parallèlement à lui-même. En particulier, on peut l'amener dans le plan d'un autre couple. Nous sommes alors ramenés à composer deux couples situés dans un même plan.

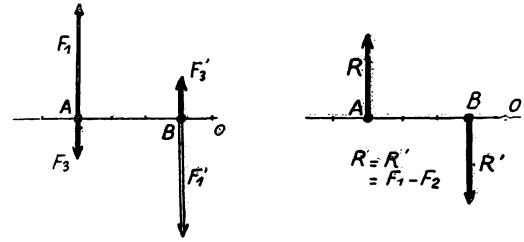


Fig 4. — Le couple (F_2, F'_2) de la figure 3 peut être remplacé par un couple de même moment (F_3, F'_3), appliqué en A et B. Le moment du couple résultant (R, R') est égal à la somme algébrique des moments des couples composants.

On peut donc remplacer deux couples parallèles par un couple unique dont le moment est égal à la somme algébrique de leurs moments.

4. Composition d'un nombre quelconque de couples situés dans un même plan ou dans des plans parallèles.

En raisonnant comme nous l'avons fait précédemment, on peut amener tous les couples à être dans un même plan et à avoir même bras de levier.

Composons deux d'entre eux, puis le couple résultant obtenu avec un troisième, etc. Finalement il ne reste plus qu'un couple et nous pouvons conclure :

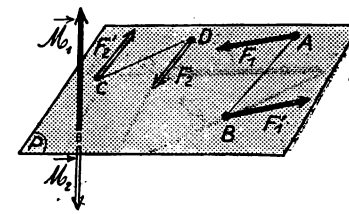


Fig. 5. — Dans ce cas, que vaut le *vecteur-moment* du couple résultant? Est-il positif ou négatif?

Plusieurs couples situés dans un même plan ou dans des plans parallèles peuvent être remplacés par un couple unique dont le moment est égal à la somme algébrique des moments des couples donnés.

REMARQUE. — Soient deux couples de même plan. Leurs moments peuvent être représentés par deux vecteurs $\overrightarrow{\mathcal{M}_1}$ et $\overrightarrow{\mathcal{M}_2}$ (fig. 5).

Le vecteur $\overrightarrow{\mathcal{M}}$ qui représente le moment résultant est égal à leur somme algébrique.

Cette remarque s'étend au cas d'un nombre quelconque de couples parallèles ou dans un même plan.

5. Composition de deux couples concourants.

A. DÉFINITION. — Soit une barre *xy* (fig. 6) sollicitée par deux couples :

1° l'un (F, F′), de plan P, et de bras de levier CD ;

2° l'autre (F_1, F'_1), de plan P_1, et de bras de levier AB.

Les plans P et P_1 se coupant suivant *xy*, les deux couples donnés sont dits *concourants*. Nous allons montrer qu'on peut les remplacer par un couple unique ou *couple résultant*.

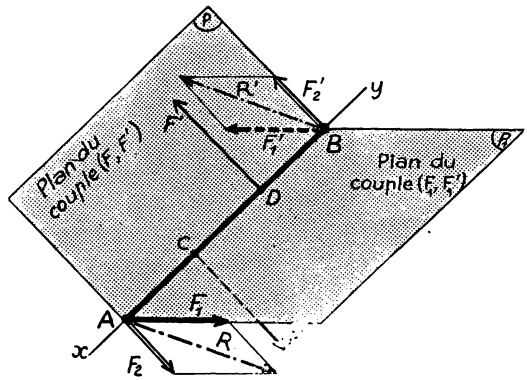


Fig. 6. — La barre AB est sollicitée par deux couples : (F, F′) et (F_1, F'_1) dont les plans sont distincts.

B. EXISTENCE DU COUPLE RÉSULTANT. — Nous pouvons remplacer le couple (F, F′) par un couple équivalent (F_2, F'_2), donc de même sens et de même moment, ayant AB pour bras de levier.

Nous pouvons ensuite remplacer les forces F_1 et F_2 par leur résultante R, les forces F'_1 et F'_2 par leur résultante R′. Ces deux résultantes sont égales, parallèles, de sens contraires : elles forment un *couple*.

Les couples donnés (F, F′) et (F_1, F'_1), ou *couples composants*, peuvent donc être remplacés par un couple unique (R, R′), sans que soit modifié l'état extérieur du corps : c'est le *couple résultant*.

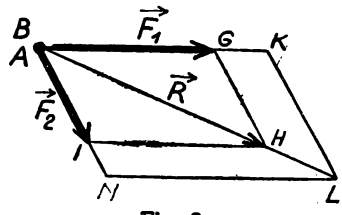


Fig. 7.

C. MOMENT DU COUPLE RÉSULTANT. — Supposons la barre AB perpendiculaire au plan de la figure 7. Les projections sur ce plan des points A et B sont confondues. Représentons les forces F_1 et F_2 appliquées en A. Leur résultante R est représentée par la diagonale AH du parallélogramme AGHI. C'est la valeur commune des forces du couple résultant.

Portons sur AG une longueur AK proportionnelle à la valeur numérique du moment $\mathfrak{M}_1$ et sur AI, *à la même échelle*, une longueur AN proportionnelle à celle du moment $\mathfrak{M}_2$. Le parallélogramme AKLN construit sur AK et AN est homothétique du parallélogramme des forces AGHI. Par suite, AL représente, à l'échelle adoptée, la valeur numérique du moment $\mathfrak{M}$ du couple résultant (R, R′).

Faisons maintenant tourner de 90° le parallélogramme AKLN dans

un sens tel que les vecteurs $\overrightarrow{AK'}$ et $\overrightarrow{AN'}$ représentent en grandeur et en signe les moments $\overrightarrow{\mathcal{M}_1}$ et $\overrightarrow{\mathcal{M}_2}$ des couples (F_1, F'_1), (F_2, F'_2) (fig. 8).

Nous voyons que le vecteur AL' représente en grandeur et en signe le moment $\overrightarrow{\mathcal{M}}$ du couple (R, R').

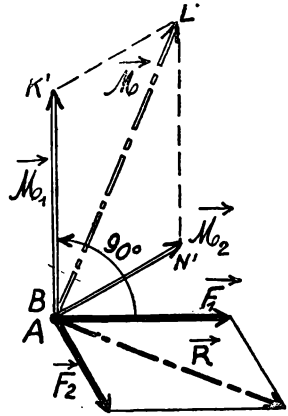


Fig. 8. — Le moment $\mathcal{M}$ du couple résultant est la *somme géométrique* des moments des couples composants $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$.

CONCLUSION. — ***Deux couples concourants peuvent être remplacés par un couple unique ou couple résultant, dont le moment est représenté en direction, sens et grandeur, par la diagonale d'un parallélogramme construit sur les vecteurs qui représentent les moments des couples composants.***

REMARQUE. — Les vecteurs couples se composent donc comme les vecteurs forces. On dit que $\overrightarrow{\mathcal{M}}$ est la somme géométrique des vecteurs $\overrightarrow{\mathcal{M}_1}$ et $\overrightarrow{\mathcal{M}_2}$ et l'on écrit :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}} = \overrightarrow{\mathcal{M}_1} + \overrightarrow{\mathcal{M}_2}.$$

6. Composition d'un système de couples quelconques.

La méthode précédente se généralise.

Étant donné un système de couples quelconques, nous pouvons composer deux d'entre eux, puis le couple résultant obtenu avec un troisième et ainsi de suite.

Finalement, nous obtenons un couple unique ou couple résultant dont le moment est égal à la somme géométrique des moments des couples composants (fig. 9).

REMARQUE. — *On peut remplacer un couple donné par deux autres couples dont il est la résultante.* Il suffit d'opérer sur le vecteur moment $\overrightarrow{\mathcal{M}}$ comme sur un vecteur-force qu'on décompose en deux autres vecteurs dont il est la résultante.

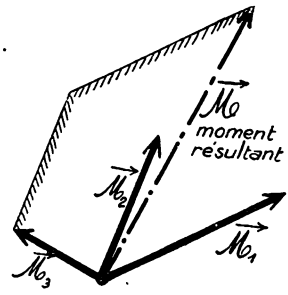


Fig. 9. — Les vecteurs-moments se composent comme les vecteurs-forces.

Résumé.

1. On peut remplacer deux ou plusieurs couples situés dans un même plan, ou dans des plans parallèles, par un couple unique ou couple résultant, dont le moment est égal à la somme algébrique des moments des couples composants.

2. Deux ou plusieurs couples concourants peuvent être remplacés par un couple unique, dont le moment est égal à la somme géométrique des moments des couples composants.

Exercices.

1. Deux couples (F_1, F'_1), (F_2, F'_2), de même sens ou de sens contraires, sont dans des plans parallèles.

Déterminer le moment $\mathfrak{M}$ du couple résultant dans les deux cas. Les données numériques sont les suivantes :

$F_1 = F'_1 = 5\ kgp$ bras de levier 0,60 *m*

$F_2 = F'_2 = 8\ kgp$ bras de levier 0,40 *m*

Avec quelles forces peut-on réaliser le couple résultant si l'on prend un bras de levier de 1,20 *m*?

2. Mêmes questions que précédemment en supposant que les plans des deux couples font entre eux un angle de 90°, de 60°. *(Le sens des couples n'interviendra pas.)*

3. Remplacer un couple (F, F') donné par deux autres couples dont il soit la résultante.

On sait que les deux couples cherchés sont rectangulaires et que le vecteur-moment de l'un d'eux fait avec le vecteur-moment $\vec{\mathfrak{M}}$ du couple donné un angle de 30°.

Résoudre le problème graphiquement et par le calcul.

Application numérique : F = F' = 22 *kgp ;* bras de levier : 1,10 *m*

Réduction des forces appliquées à un solide.

Rappelons que :

1° un système de forces *concourantes* ou *parallèles* peut être remplacé par une *seule* force appelée *résultante :* on dit qu'il est *réductible à une force unique.*

2° un système de couples est *réductible à un couple unique* ou *couple résultant.*

Nous allons utiliser ces résultats pour étudier la composition d'un système de forces quelconques appliquées à un solide. Mais il nous faut auparavant démontrer un théorème très important.

1. Théorème. — Une force appliquée en un point d'un corps solide est équivalente à une force de même direction, sens et grandeur, appliquée en un point du corps choisi à volonté, et à un couple.

1. Expérience. — Soit une barre AB mobile autour de l'axe O (fig. 1). En A, agit une force verticale F = 400 *gp*. L'équilibre horizontal de la barre est obtenu par un ressort à tension réglable.

Déplaçons la force F, parallèlement à elle-même, de A en C; *l'équilibre est détruit :* la barre tourne autour du point O.

Pour rétablir l'équilibre primitif, c'est-à-dire pour maintenir la barre AB horizontale, l'expérience montre qu'il faut lui appliquer un couple dont le moment $\mathfrak{M}$ est égal *en grandeur et en signe au moment par rapport à C de la force F,* soit :

$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_{(C)}\, F = 15 \times 400 = 6\,000$ *c.n.g*

Si nous adoptons un bras de levier de 20 *cm,* la valeur commune des forces de ce couple est :

$$F' = F'' = \frac{6\,000}{20} = 300\ gp$$

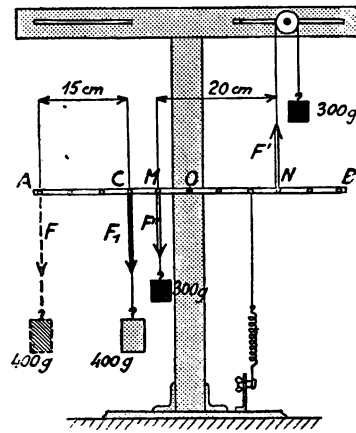


Fig. 1. — La force F appliquée en A est équivalente à une force équipollente F_1, appliquée en C, et à un couple (F', F'') de moment $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_{(C)}F$.

Nous pouvons vérifier que les forces F′ et F″ appliquées en N et M rétablissent l'équilibre.

CONCLUSION. — ***Une force F, appliquée en un point A d'un corps solide, équivaut à une force F_1, équipollente à F, appliquée en un point quelconque C de ce corps, et à un couple dont le moment est égal, en grandeur et en signe, au moment par rapport au point C de la force F.***

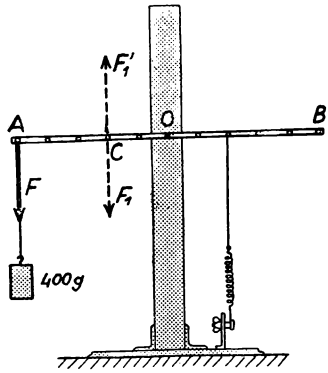


Fig. 2. — On applique au point C un système de forces en équilibre : $F_1 = F'_1 = F$. Démontrez la propriété vérifiée sur l'expérience de la figure 1.

2. DÉMONSTRATION. — Soit F la force appliquée en A (fig. 2). Sans changer l'état extérieur de la barre AB, nous pouvons lui appliquer un système de forces en équilibre (F', F'_1) tel que F_1 soit équipollente à F.

Tout se passe comme si la barre était soumise :

1° à une force F_1 appliquée en C et égale à F ;

2° à un couple (F, F'_1) de bras de levier CA et dont le moment $\mathcal{M}$ est bien égal au moment par rapport au point C de la force F.

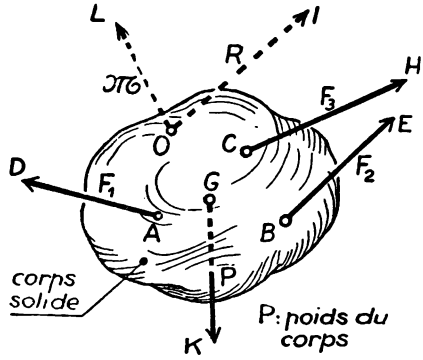


Fig. 3. — Un système de forces quelconques peut être **réduit** au point O à une **résultante générale R** et à un **couple résultant** de moment $\mathcal{M}$.

2. Réduction d'un système de forces à une force unique et à un couple.

Soit un corps solide S soumis à un système de forces quelconques, F_1, F_2, F_3, P, parmi lesquelles son poids P (fig. 3).

O étant un point quelconque du solide S, la force F_1 appliquée en A est équivalente à une force équipollente appliquée en O et à un couple dont le moment est égal au moment de F_1 par rapport au point O. Et il en est de même pour chacune des autres forces F_2, F_3 et P.

Nous obtenons ainsi quatre forces concourantes en O, et quatre couples. Ces couples sont, en général, dans des plans différents.

1° Les quatre forces concourantes en O admettent une résultante ***R*** dite ***résultante générale des forces appliquées.***

2° Les quatre couples peuvent être remplacés par un couple unique ou ***couple résultant*** dont le vecteur-moment $\mathfrak{M}$ est égal à la *somme géométrique* des vecteurs-moments des couples composants.

Le système des forces données F_1, F_2, F_3, P est ainsi ***réduit*** à une résultante R et à un couple de moment $\mathfrak{M}$.

Remarque 1. — Le point O peut être choisi arbitrairement. *Si l'on fait la réduction en un autre point O', la résultante générale ne change pas, mais le moment du couple résultant change,* car les moments des couples composants ont varié.

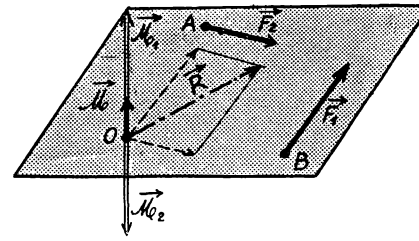


Fig. 4. — Ici les forces F_1 et F_2 sont dans un même plan qui contient le point O. Réduisez-les en ce point. Que vaut le moment $\mathfrak{M}$ du couple résultant?

Remarque 2. — Si toutes les forces appliquées au corps solide sont dans un même plan P, après réduction en un point O du plan P, tous les couples sont dans ce plan et le moment du couple résultant est alors égal à la *somme algébrique* de leurs moments (fig. 4).

3. Condition pour qu'un système de forces soit réductible à une force unique.

Il est évident que ***pour qu'un système de forces soit réductible en un point à une force unique, il faut que le moment du couple résultant soit nul en ce point.***

En particulier, il en est ainsi pour un point quelconque de la droite d'action de la résultante de deux forces parallèles de même sens ou de sens contraires.

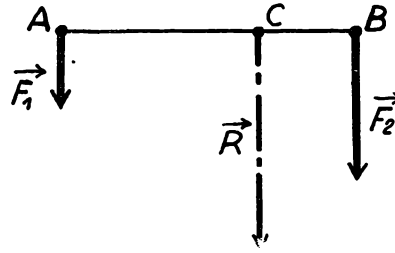


Fig. 5. — Réduisez les forces F_1 et F_2 au point C d'application de leur résultante. Énoncez le résultat.

Sur la figure 5 le point C est tel que :

$$F_1 \times CA = F_2 \times CB$$

d'où :

$$\mathfrak{M}_{(C)}\, F_1 + \mathfrak{M}_{(C)}\, F_2 = 0.$$

4. Condition pour qu'un système de forces soit en équilibre.

Pour qu'un système de forces soit en équilibre, il faut et il suffit que la résultante générale et que le moment du couple résultant soient nuls simultanément.

1° *La condition est nécessaire.* — Soit F l'une des forces d'un *système en équilibre* appliqué à un corps solide : elle est égale et directement opposée à la résultante R′ de toutes les autres (faire la figure). Substituons au système donné le système équivalent F, R′, et réduisons celui-ci en un *point quelconque* O.

La résultante générale R est nulle : $R = 0$. Les moments par rapport à O des forces F et R′ sont égaux et de signes contraires : leurs vecteurs sont égaux et directement opposés et leur somme est nulle. Par suite, le moment du couple résultant $\mathfrak{M} = 0$.

2° *La condition est suffisante.* — *Si la résultante générale d'un système de forces et le couple résultant par rapport à un point sont nuls simultanément, ce système est en équilibre.*

En effet, si $\mathfrak{M} = 0$, le système se réduit à une force unique R. Or, $R = 0$ par hypothèse; donc le système a une résultante nulle : il est en équilibre.

5. Application : effets des charges qui sollicitent une console.

Considérons la console représentée sur la figure 6. Elle est sollicitée :
1° par *son poids* P = 60 *kgp;*
2° par *la charge verticale* Q = 200 *kgp.*
3° par *les réactions des appuis* en A et B.

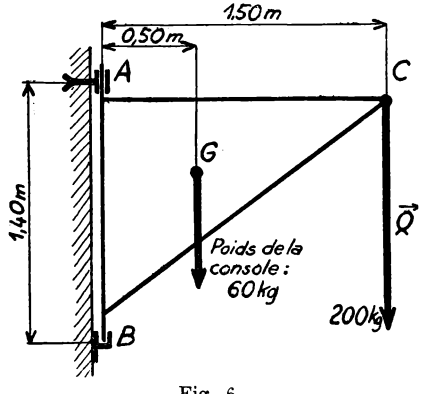


Fig. 6.

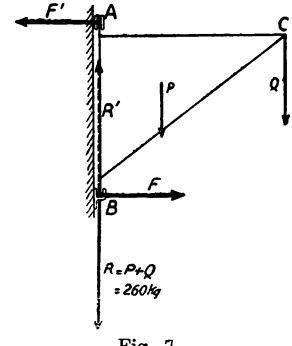


Fig. 7.

Toutes ces forces sont en équilibre dans un même plan; le système des réactions fait donc équilibre au système des charges appliquées P et Q.

Au point B du montant AB de la console, les forces P et Q se réduisent :

à une résultante :

$$R = P + Q = 60 + 200 = 260 \ kgp ;$$

à un couple dont le moment $\mathfrak{M}$ est égal à la somme algébrique des moments par rapport à B des forces P et Q, soit :

$$\mathfrak{M} = -(0{,}5 \times 60 + 1{,}5 \times 200) = -330 \ m.kg$$

Par suite, les réactions des appuis équivalent :

à une résultante R', égale et directement opposée à R, et qui ne peut être exercée que par l'appui B (fig. 7);

et à un couple de moment $\mathfrak{M}'$, égal et directement opposé à $\mathfrak{M}$, soit $\mathfrak{M}' = +330 \ m.kg$.

La réaction de l'appui A sur la tige AB est normale à celle-ci, soit F'. La réaction de l'appui B admet les composantes F, normale à AB, et R'.

Les forces F et F' définissent le couple de moment $\mathfrak{M}'$:

$$F = F' = 330 : 1{,}4 \simeq 236 \ kgp.$$

Nous laissons au lecteur le soin de calculer la réaction en B, résultante de R' et F.

6. Un système de forces quelconques peut être réduit à deux forces dont l'une est appliquée en un point qu'on peut choisir à volonté.

1° Les forces appliquées à un corps solide peuvent être réduites au point O de ce corps à une force unique R et à un couple de moment $\mathfrak{M}$ (fig. 8).

2° Ce couple peut être réalisé par deux forces égales, parallèles et de sens contraires, dont le plan est perpendiculaire au vecteur $\overrightarrow{\mathfrak{M}}$. Nous pouvons appliquer l'une de ces forces F'_1, en O et l'autre F_1 en un point quelconque O_1 du plan P perpendiculaire en O au vecteur $\overrightarrow{\mathfrak{M}}$.

La direction des forces F'_1, F_1 peut être choisie à volonté dans le plan P, mais leur grandeur doit être telle que le moment du couple (F_1, F'_1) soit égal à $\mathfrak{M}$.

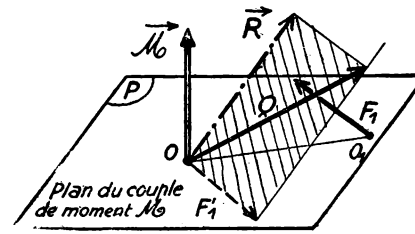


Fig. 8. — Un système de forces quelconques peut être réduit à deux forces : l'une Q appliquée en O, l'autre F_1 appliquée en O_1.

Or les forces R et F'_1, concourantes en O, admettent une résultante Q. Il en résulte que l'ensemble des forces appliquées au corps solide peut être remplacé par deux forces non concourantes et non parallèles dont l'une, Q, est appliquée au point O choisi à volonté.

EXEMPLE. — Sur la console ABC de la figure 6, les deux réactions des appuis, supposées appliquées aux points A et B, font équilibre au système des forces P et Q. Ces dernières se réduisent donc à deux forces respectivement égales et directement opposées à ces réactions.

Résumé.

1. Une force F, appliquée en un point A d'un corps solide, est *équivalente* à une *force* F', équipollente à F, appliquée en un autre point C de ce corps, et à un *couple* dont le moment $\mathcal{M}$ est égal au moment par rapport à C de la force F.

2. Un système de forces quelconques appliquées à un corps solide peut être réduit, en un point quelconque de ce corps, à une *résultante générale* et à un *couple résultant* de moment $\mathcal{M}$.

3. Pour qu'un système de forces soit en équilibre, il faut et il suffit que la résultante générale et que le moment du couple résultant soient nuls simultanément.

$$R = 0; \qquad \mathcal{M} = 0.$$

4. Un système de forces quelconques appliquées à un corps solide peut être réduit à deux forces dont l'une est appliquée en un point de ce corps choisi à volonté.

Exercices.

1. Une barre rigide de section carrée peut glisser dans les guides A et B (fig. 9). Elle porte un bras MN à l'extrémité N duquel on exerce une force F = 12 *kgp* parallèle à AB.

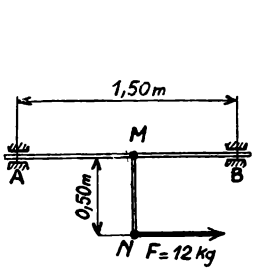


Fig. 9.

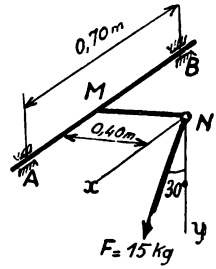


Fig. 10.

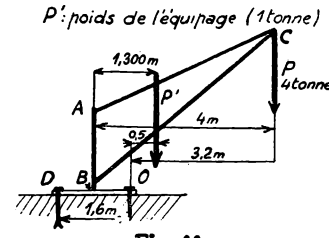


Fig. 11.

1° Réduire cette force au point M et analyser ses effets.
2° Déterminer les forces du couple des réactions en A et B.

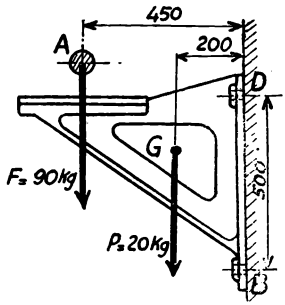


Fig. 12.

2. Un arbre AB (fig. 10), mobile autour de son axe, porte un bras MN qui lui est perpendiculaire (M au milieu de AB).

Une force F de 15 *kgp* agit en N dans un plan xNy perpendiculaire à MN.

1° Décomposer la force F suivant les directions Nx et Ny et évaluer les forces ainsi obtenues.

2° Réduire ces forces au point M et analyser leurs effets. En particulier, montrer la nécessité d'une butée.

3. On considère la grue de la figure 11.

1° Réduire au point B les forces qui lui sont appliquées et analyser leurs effets.

2° Calculer l'effort qui tend à arracher les boulons placés en D.

4. Même question pour la chaise console de la figure 12. Construire en outre les réactions aux points D et B.

Centre de gravité d'un corps solide.

Nous avons déjà fait en physique une première étude du *centre de gravité* d'un solide; nous avons montré le rôle important qu'il joue dans les questions d'équilibre; son rôle n'est pas moindre dans beaucoup de phénomènes mécaniques. Aussi est-il nécessaire, dans bien des cas, de pouvoir fixer exactement sa position : c'est là précisément l'objet de cette leçon.

1. Tout corps solide peut être considéré comme formé de particules extrêmement petites, pesantes, invariablement liées les unes aux autres.

Un solide abandonné dans l'espace tombe verticalement.

Si nous le cassons en deux, trois, dix... vingt morceaux, chacun d'eux tombe aussi verticalement.

Pilons un morceau de craie : chaque grain de poussière, chaque *élément*, tombe verticalement quand nous lâchons la poudre dans l'espace. Tous les grains tomberaient avec la même vitesse dans le vide (tube de Newton).

Ainsi, tout corps solide peut être considéré comme formé de particules extrêmement petites, d'*éléments* pesants.

Ces éléments ont des distances mutuelles invariables : d'où la *forme invariable* d'un solide.

2. Le poids d'un corps solide est une force appliquée en un point bien déterminé : son centre de gravité.

Les poids de tous les éléments d'un solide, *ou poids élémentaires*, sont des forces dirigées verticalement de haut en bas, donc *parallèles et de même sens* (fig. 1).

Ils ont donc une *résultante unique, égale à leur somme :* c'est le poids P du corps.

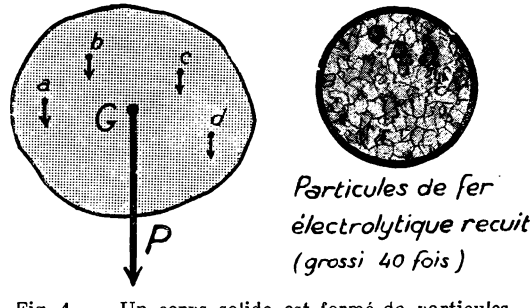


Fig. 1. — Un corps solide est formé de particules matérielles dont les distances demeurent invariables.

Le point d'application de cette résultante est le *centre du système de forces parallèles* constitué par les poids élémentaires : forces constantes, dont les points d'applications sont invariables; c'est donc un point bien déterminé : on l'appelle *centre de gravité du corps.*

La position de ce point, par rapport au solide, est invariable.

Si le corps change de position au même lieu, les poids élémentaires restent verticaux, donc parallèles : tous ont tourné d'un même angle par rapport au solide, chacun conservant sa valeur et son point d'application : le centre de ce système de forces parallèles ne change donc pas, par rapport au corps lui-même (24e Leçon).

Si le corps est transporté dans un autre lieu, de Paris à l'Équateur, par exemple, les poids élémentaires sont tous multipliés par le même nombre (0,997 dans le cas choisi) : le point d'application de leur résultante reste encore le même.

Par exemple, le centre de gravité d'une sphère solide homogène est toujours en son centre géométrique; celui de ce caillou est toujours au même point de ce caillou.

Résumons : *au point de vue de la pesanteur, tout se passe comme si un solide était soumis à une seule force, son poids, appliqué en un point de position invariable par rapport à ce solide : son centre de gravité.*

3. Centre de gravité d'une ligne, d'une surface, d'un volume.

Il résulte de ce qui précède que seuls les corps pesants ont un centre de

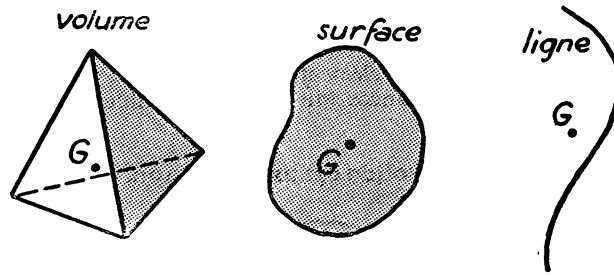


Fig. 2. — Le centre de gravité d'une ligne, d'une surface, d'un volume est, par définition, celui d'un corps homogène de même étendue.

gravité. Cependant on étend la notion de centre de gravité au cas d'un volume, d'une surface ou d'une ligne, qui n'ont pas de poids (fig. 2).

On appelle *centre de gravité d'un volume*, celui d'un corps solide, *homogène*, qui occuperait l'étendue de ce volume.

Le *centre de gravité d'une surface* est celui d'une plaque solide homogène, très mince, de même forme que la surface considérée.

Enfin, le *centre de gravité d'une ligne* n'est autre que le centre de gravité d'un fil très fin, rigide, homogène, de même forme que la ligne donnée.

4. Détermination expérimentale du centre de gravité d'un solide quelconque, homogène ou non.

Rappelons les principes de cette détermination déjà étudiée en physique.

1re *Méthode.* — *Le corps est suspendu par un fil souple à un point fixe.* Le centre de gravité se trouve sur le prolongement du fil quand le corps est en équilibre (fig. 3).

2e *Méthode.* — *Le corps est en équilibre sur une arête vive horizontale.* Son centre de gravité se trouve dans le plan vertical qui contient cette arête (fig. 4 et 5).

D'autres méthodes peuvent être utilisées (voir exercices 6 et 7, page 232).

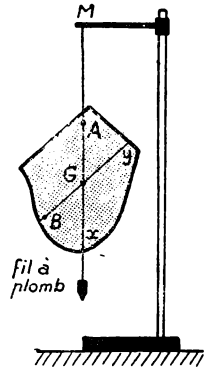


Fig. 3. — Pour déterminer le centre G d'une *plaque plane*, on la suspend à un fil. Expliquez comment on procède.

5. Détermination géométrique du centre de gravité d'un solide homogène.

Les remarques qui suivent facilitent la recherche du centre de gravité d'un solide ***homogène*** de formes géométriques simples.

1re REMARQUE. — La composition des forces, et en particulier celle des *forces parallèles*, est une opération *associative :* c'est-à-dire qu'on peut associer les forces en groupes, choisis à volonté, chercher la résultante de chacun d'eux, et enfin composer ces résultantes en une seule.

2e REMARQUE. — Lorsqu'un solide *homogène* a un *centre*, ou un *axe*, ou un *plan de symétrie*, son centre de gravité se trouve en ce centre, sur cet axe ou dans ce plan.

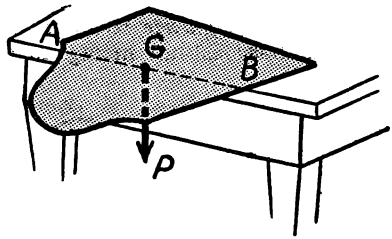


Fig. 4. — On peut aussi poser la plaque au bord d'une table. Comment faites-vous pour déterminer G ?

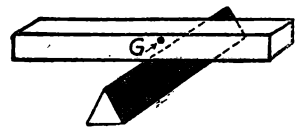


Fig. 5. — Cette règle est posée sur une arête tranchante. Comment procède-t-on pour rechercher la position de son centre de gravité G ?

En effet, le corps peut être considéré comme formé d'éléments deux à deux symétriques par rapport au centre (fig. 6), à l'axe (fig. 7), ou au plan de symétrie (fig. 8). Deux éléments symétriques ont même volume, donc même poids; par suite la résultante de ces deux poids élémentaires a son point d'application au centre, sur l'axe ou dans le plan de symétrie. Il en est évidemment de même du point d'application de la résultante générale, c'est-à-dire du centre de gravité.

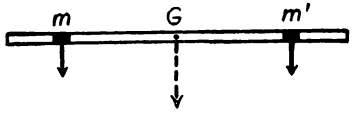


Fig. 6. — La barre homogène a un *centre de symétrie :* son centre de gravité G est en ce point.

On déterminera facilement le centre de gravité d'un rectangle, d'un carré, d'une ellipse *(intersection de deux axes de symétrie rectangulaires)*, celui d'un cube, d'un prisme droit dont la base est un hexagone régulier, d'un cylindre de révolution *(intersection de trois plans de symétrie rectangulaires deux à deux)*.

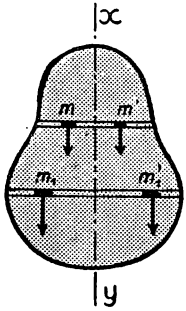


Fig. 7. — La plaque homogène a un *axe de symétrie xy :* son centre de gravité est sur cet axe.

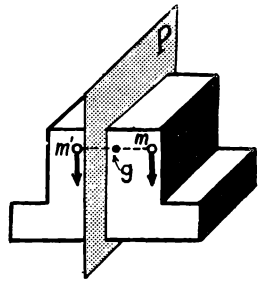


Fig. 8. — Le corps homogène a un *plan de symétrie P :* son centre de gravité est dans ce plan.

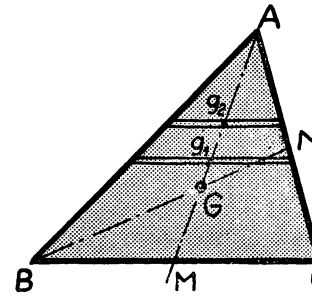


Fig. 9. — La médiane AM est un *diamètre* de la figure : le centre de gravité du triangle ABC est sur ce diamètre.

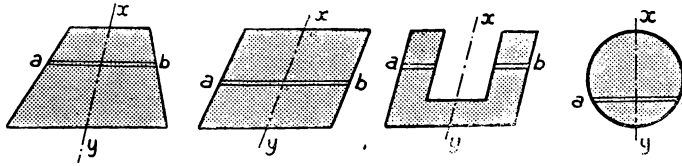


Fig. 10. — Ces figures ont un *diamètre xy :* leur centre de gravité est placé dessus.

3e REMARQUE. — *Lorsqu'un solide homogène a un diamètre ou un plan diamétral, son centre de gravité est sur ce diamètre ou dans ce plan.*

a) Dans un ***triangle*** ABC, la médiane AM relative au côté BC est le lieu des milieux des segments parallèles à BC. On dit que AM est un *diamètre* de la figure.

Prenons une plaque triangulaire mince, et décomposons-la en bandes de faible largeur, parallèles à l'un de ses côtés (fig. 9). Le centre de gravité de chacune d'elles est en son milieu, c'est-à-dire sur AM. Le centre G est donc sur cette médiane.

Un découpage analogue parallèlement à AC montre que G est sur BN, c'est-à-dire au point de rencontre des médianes.

D'une manière générale, *une figure a un diamètre lorsque le lieu géométrique des cordes parallèles à une direction donnée est une droite* (fig. 10). Le raisonnement précédent lui est applicable.

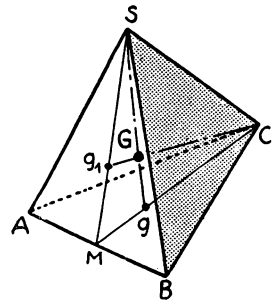


Fig. 11. — Le plan SMC est un *plan diamétral* : le centre de gravité est dans ce plan.

b) Sur la figure 11, le plan SMC partage toutes les parallèles à AB en deux parties égales. Ce plan est appelé *plan diamétral*. Il contient le point G.

D'une manière générale, *une figure a un plan diamétral si le lieu des milieux des segments de cette figure parallèles à une direction donnée est un plan* (fig. 13). Le centre de gravité est alors dans ce plan.

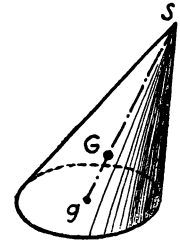


Fig. 12. — Le centre G est au 1/4 de Sg à partir de la base.

4e REMARQUE. — *Lorsqu'un solide homogène peut être décomposé en éléments qui ont leurs centres de gravité sur une droite, le centre de gravité du solide est sur cette droite.*

Considérons une ***pyramide triangulaire*** SABC (fig. 11).

Découpons-la en tranches de faible épaisseur parallèles à la base ABC.

Nous obtenons une pile de plaques planes triangulaires dont les centres de gravité sont sur la droite S*g*. Donc le centre de gravité G de la pyramide se trouve sur cette droite.

Prenons maintenant comme base le triangle SAB : le centre de gravité se trouve aussi sur Cg_1. Il est donc à l'intersection de S*g* et de Cg_1.

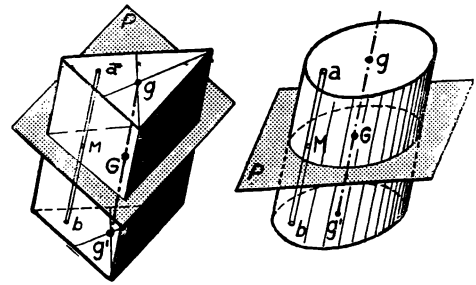


Fig. 13. — Le plan P partage *a b* en deux parties égales ; c'est un *plan diamétral* : il contient le point G.

Montrez que ce point est bien placé comme l'indiquent les figures.

Des propriétés géométriques de la figure, on déduit que : $Gg = 1/4\ Sg$.

Pour le ***cône***, limite d'une pyramide dont le nombre des faces croît indéfiniment, nous aurons également (fig. 12) : $Gg = 1/4\ Sg$.

6. Centre de gravité d'une surface trapézoïdale (fig. 14).

L'aire ABCD se décompose en deux triangles dont les centres de gravité sont respectivement en g_1 et g_2. Si en ces points nous appliquons des forces égales aux poids des triangles DAB et BDC, ces forces parallèles et de même sens ont une résultante égale au poids du trapèze qui est appliquée en un point de la droite $g_1\ g_2$.

Or, la figure admet un diamètre MN qui porte le point G. Donc, le

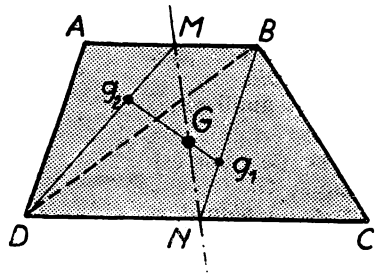


Fig. 14. — Expliquez comment on détermine géométriquement le centre de gravité G de ce trapèze.

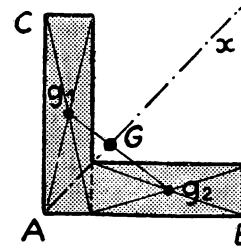


Fig. 15. — Le point G est :
1°) sur l'axe de symétrie Ax.
2°) sur la ligne g_1g_2.

centre de gravité du trapèze est à l'intersection de la médiane MN et de la droite $g_1\ g_2$.

7. Centre de gravité de la section d'une cornière.

La figure 15 représente la section d'une cornière à branches égales en acier étiré.

Ax est un axe de symétrie et G se trouve sur cet axe.

De plus, la figure se décompose en deux rectangles de centres de gravité g_1, g_2, faciles à déterminer. Le point G se trouve aussi sur la droite $g_1\ g_2$,donc à l'intersection de cette droite avec Ax.

8. Centre de gravité d'une ligne quelconque.

Soit une ligne brisée ABCD, matérialisée par un fil métallique (fig. 16). Le centre de gravité de chaque segment de droite est en son milieu.

Le centre de gravité G de la ligne est donc le centre des forces parallèles appliquées en g_1, g_2, g_3.

APPLICATION. — *Centre de gravité du périmètre d'un triangle.*

Les centres de gravité de chacun des côtés forment un triangle D, E, F (fig. 17).

Les forces p_1, p_2 ont une résultante $(p_1 + p_2)$ appliquée en un point K de FE, tel que : $p_1 \times FK = p_2 \times EK$

ou : $$\frac{p_1}{p_2} = \frac{EK}{FK}.$$

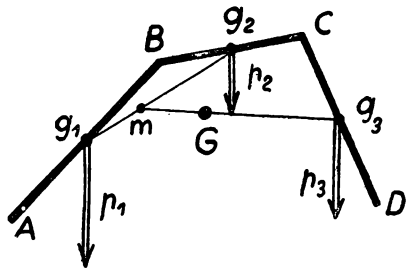


Fig. 16. — Expliquez comment on procède pour déterminer G.

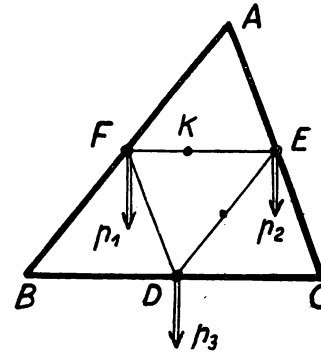


Fig. 17. — Recherchez la position du centre de gravité du *périmètre* de ce triangle.

Les poids étant proportionnels aux longueurs des côtés on a :

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{AB}{AC} = \frac{ED}{FD} \quad \text{d'où} \quad \frac{EK}{FK} = \frac{ED}{FD}.$$

Cette relation montre que le point K est le pied de la bissectrice de l'angle $\widehat{FDE}$.

La résultante des forces p_3 et $(p_1 + p_2)$ est donc sur DK.

Si nous composions d'abord les forces p_1 et p_3, nous constaterions que le centre G cherché est aussi sur la bissectrice de l'angle $\widehat{FED}$.

Donc : *le centre de gravité du périmètre d'un triangle est le point de concours des bissectrices du triangle obtenu en joignant les milieux des côtés.*

Résumé.

1. Le poids d'un corps est la résultante des forces de pesanteur qui s'exercent sur ses divers éléments.

2. Le *centre de gravité* d'un corps solide est le point d'application de son poids. Sa position par rapport au solide est invariable.

3. On peut déterminer expérimentalement le centre de gravité d'un solide *quelconque* soit en le suspendant à un point fixe, soit en le supportant par une arête vive, soit par d'autres procédés.

4. Lorsqu'un corps solide *homogène* a un centre, ou un axe, ou un plan de symétrie, un diamètre ou un plan diamétral, son centre de gravité est placé sur cet élément géométrique.

Exercices.

Nota. — Certains de ces exercices donnent lieu à une vérification expérimentale que es élèves devront faire.

1. Déterminer le centre de gravité de surface d'un quadrilatère quelconque (le décomposer de deux manières différentes en deux triangles).

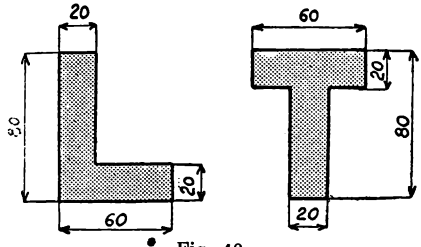


Fig. 18.

2. Déterminer le centre de gravité du périmètre d'un quadrilatère.

3. Les plaques de tôle ci-contre (fig. 18) sont décomposables en rectangles. En appliquant aux points g_1 et g_2 des forces égales au poids des rectangles correspondants, déterminer leur centre de gravité. (Poser p = poids de l'unité de surface de la tôle d'épaisseur e.)

4. Déterminer le centre de gravité d'une ligne polygonale régulière formée de 3 ou 4 côtés.

5. Démontrer que les diagonales d'un parallélogramme ABCD sont des diamètres de la figure. En déduire la position du centre de gravité.

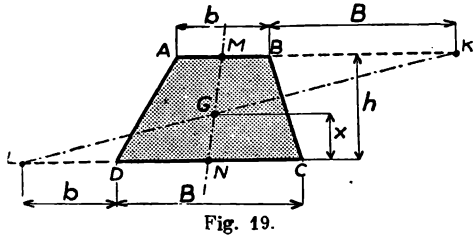


Fig. 19.

6. Déterminer expérimentalement le centre de gravité d'un té à dessin, d'une équerre.

7. On peut obtenir graphiquement le centre de gravité d'un trapèze à l'aide de la construction indiquée sur la figure 19.

1° Vérifier graphiquement qu'il coïncide avec le point G obtenu en appliquant la méthode de la figure 14;

2° Pour les deux constructions, montrer que le point G qui se trouve sur la droite joignant les milieux des côtés parallèles est à une distance de la grande base égale à

$$x = \frac{h}{3} \times \frac{B + 2b}{B + b}.$$

Détermination du centre de gravité par le calcul.

Il est possible de déterminer le centre de gravité d'une figure à l'aide du calcul.

1. Centre de gravité d'une surface plane décomposable en rectangles.

Soit à trouver le centre de gravité du profil représenté par la figure 1.

Décomposons-le en trois rectangles I, II, III, dont les aires sont respectivement :

$$s_1 = 28 \times 10 = 280\ mm^2$$
$$s_2 = 70 \times 12 = 840\ mm^2$$
$$s_3 = 48 \times 15 = 720\ mm^2$$

L'aire totale S a donc pour valeur

$$S = 280 + 840 + 720 = 1\,840\ mm^2.$$

Les centres de gravité des rectangles ainsi formés se trouvent au point de rencontre des diagonales en g_1, g_2, g_3.

Imaginons qu'on ait découpé la section donnée en vraie grandeur, dans une tôle de faible épaisseur.

Disposons cette plaque suivant un plan horizontal et supposons-la mobile autour d'une *charnière fictive AB* (fig. 2).

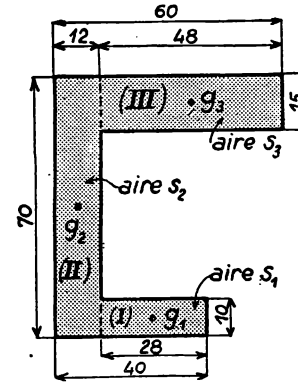


Fig. 1. — La figure est décomposable en rectangles (I), (II), (III). Nous pouvons la matérialiser par une plaque de tôle de faible épaisseur.

Les poids des rectangles sont des forces appliquées en g_1, g_2, g_3. Ils tendent à faire tourner la plaque autour de AB.

D'après un théorème connu, la *somme algébrique de leurs moments par rapport à AB est égale au moment par rapport à cet axe de leur résultante P appliquée en G.*

Soit x la distance du point G à la charnière. Les bras de levier des forces p_1, p_2, p_3, sont respectivement de 26, 6, et 36 *mm*.

On a : $$x \times P = 26 \times p_1 + 6 \times p_2 + 36 \times p_3. \qquad (1)$$

Or, si l'on désigne par p le poids de son unité de surface (poids de 1 cm² de la tôle employée) :

$$\left.\begin{aligned} p_1 &= p \times s_1 \\ p_2 &= p \times s_2 \\ p_3 &= p \times s_3 \end{aligned}\right\} \quad P = p_1 + p_2 + p_3 = p \times S.$$

L'égalité (1) s'écrit après simplification :

$$S \times x = s_1 \times 26 + s_2 \times 6 + s_3 \times 36 \qquad (2)$$

Remplaçons les lettres par leurs valeurs :

$$x = \frac{280 \times 26 + 840 \times 6 + 720 \times 36}{1\,840} = \frac{38\,240}{1\,840} = \mathbf{20{,}8\ mm}$$

Le point G se trouve donc sur une parallèle à AB à 20,8 *mm* de distance (fig. 3).

Pour le déterminer complètement, on répète le même calcul en choisissant une autre charnière, AC par exemple.

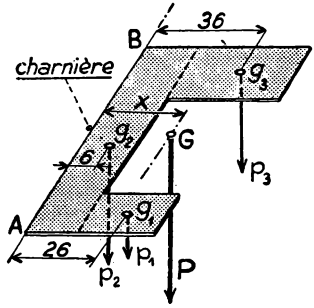


Fig. 2. — On suppose la plaque précédente mobile autour d'une charnière AB. On applique le théorème du moment de la résultante par rapport à un axe, d'où x.

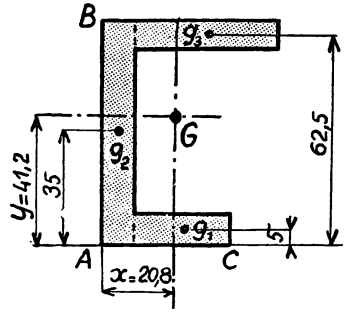


Fig. 3. — On recommence un calcul analogue pour une autre charnière AC, d'où y.

Soit y la distance de G à AC. Les bras de levier des forces p_1, p_2, p_3 sont alors : 5, 35 et 62,5 *mm* (fig. 3).

Comme précédemment :

$$S \times y = s_1 \times 5 + s_2 \times 35 + s_3 \times 62{,}5$$

d'où :

$$y = \frac{280 \times 5 + 840 \times 35 + 720 \times 62{,}5}{1\,840} = \frac{75\,800}{1\,840} = \mathbf{41{,}2\ mm}$$

Le point G est sur une parallèle à AC menée à une distance de 41,2 *mm* de cette droite.

2. Disposition pratique des calculs.

En pratique, on dispose les calculs comme l'indique le tableau ci-après :

Surfaces en mm²	d (distance en mm du centre de gravité à l'axe charnière)	Produits $S \times d$
$s_1 = 28 \times 10 = 280$	26	7 280
$s_2 = 70 \times 12 = 840$	6	5 040
$s_3 = 48 \times 15 = 720$	36	25 920
$S = 1\,840$	x	$S \times x = 38\,240$

$$x = \frac{38\,240}{1\,840} = 20{,}8\ mm$$

On procéderait de même pour calculer y.

REMARQUE. — Reportons-nous à la figure 3. Le calcul qui précède consiste :

1° à orienter les *vecteurs-poids élémentaires* perpendiculairement au plan de figure;

2° à calculer les moments de ces forces (ou des surfaces correspondantes) par rapport à deux axes rectangulaires;

3° à appliquer le théorème des moments.

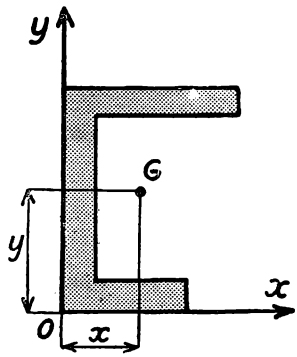


Fig. 4. — Le point G est alors défini par ses coordonnées x et y.

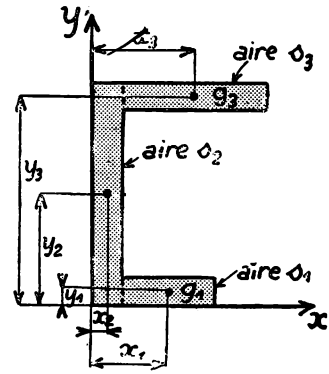


Fig. 5. — Dans le cas général, écrivez les expressions de x et y.

Le point G est alors défini par ses *coordonnées* (fig. 4) :

$$x = 20{,}8\ mm \qquad y = 41{,}2\ mm$$

D'une manière générale nous écrirons (fig. 5) :

$$x = \frac{s_1x_1 + s_2x_2 + s_3x_3}{S}$$

$$y = \frac{s_1y_1 + s_2y_2 + s_3y_3}{S}$$

où : (x_1 , y_1), (x_2 , y_2), (x_3 , y_3), désignent les coordonnées du centre de gravité de chacune des surfaces partielles qui constituent la surface totale considérée.

3. Centre de gravité d'une surface plane présentant un évidement.

La figure 6 représente une plaque de tôle percée d'un trou. Soient : g_1 le centre de gravité du rectangle ABCD, g_2 le centre du cercle.

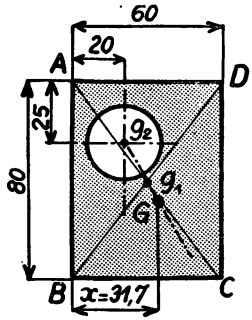


Fig. 6. — Voici une plaque percée d'un trou *(diamètre : 30 mm)*. g_1 est le centre de gravité de la plaque pleine, g_2 celui de la partie enlevée.

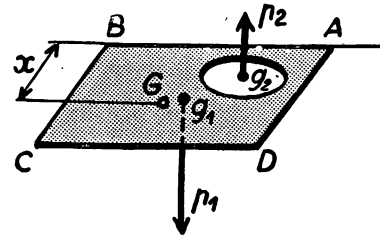


Fig. 7. — Pour tenir compte de la partie enlevée, on dispose les forces comme ci-dessus.

Pour déterminer le centre de gravité de la surface on peut procéder de la manière suivante :

On applique en g_1 une force égale à p_1, poids de la plaque rectangulaire *avant* l'exécution du trou, puis en g_2 une force p_2 égale au poids de matière enlevée, mais dirigée en sens inverse de p_1 (fig. 7). Le calcul se développe d'une manière identique à celui du paragraphe 1 en affectant du signe (—) le moment du poids de la partie enlevée.

Prenons comme charnière AB. On a :

Surfaces en mm²	d en mm	Produits $S \times d$
$s_1 = 60 \times 80 = 4\ 800$	30	144 000
$s_2 = \frac{\pi 30^2}{4} = -707$	20	— 14 140
S = 4 093	x	129 860

D'où $$x = \frac{129860}{4\ 093} = 31{,}7 \text{ mm}$$

Le point G est donc sur une parallèle à AB à 31,7 *mm* de cet axe. De plus, il est sur la droite g_1g_2, donc à leur intersection.

REMARQUE. — Nous aurions pu évidemment chercher la distance du point G à la droite BC, à l'aide d'un calcul identique.

4. Centre de gravité d'un volume qui admet un plan de symétrie.

Considérons la manivelle de la figure 8. La pièce admet un plan de symétrie AB qui contient le centre de gravité cherché et elle se décompose en trois solides :

le maneton et ses 2 collerettes : volume V_1
le bras de manivelle..... : volume V_2 } Volume total : V
l'arbre..... : volume V_3 }

Les centres de gravité de chacune de ces parties sont aisément placés sur la figure et leurs cotes déterminées.

Disposons les poids des différentes parties perpendiculairement au plan de symétrie.

a) La somme algébrique des moments, par rapport au plan de trace MN, des forces appliquées en g_1, g_2, g_3, est égale

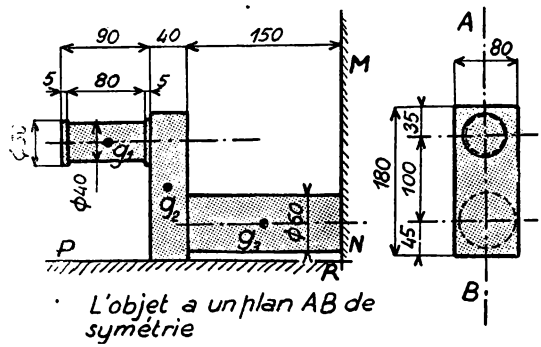


Fig. 8. — Les poids des différentes parties sont supposées perpendiculaires au plan de symétrie. On applique le théorème du moment de la résultante par rapport au plan de trace PR, puis par rapport au plan de trace MN.

au moment, par rapport au même plan, de leur résultante.

Soit x la distance du point G au plan MN.

Nous pouvons écrire par analogie avec ce qui précède :

$$V \times x = V_1 \times x_1 + V_2 \times x_2 + V_3 \times x_3.$$

Toutes les quantités qui figurent au premier membre, ainsi que V, sont connues. Par suite :

$$x = \frac{V_1x_1 + V_2x_2 + V_3x_3}{V}$$

Le point G se trouve donc, dans le plan de symétrie AB, sur une parallèle à MN menée à la distance x.

b) Prenons les moments des mêmes forces par rapport au plan de trace PR qui leur est parallèle. Désignons par y la distance du point G à ce plan.

$$y = \frac{V_1y_1 + V_2y_2 + V_3y_3}{V}$$

Le point G, situé dans le plan AB, est sur une parallèle à PR menée à la distance y. Il est donc bien déterminé. (*Voir Exercice* 2.)

5. Centre de gravité d'un volume qui n'admet pas de plan de symétrie.

Si la pièce ne présente pas de plan de symétrie (fig. 9), on détermine successivement les distances du centre de gravité à trois plans deux à deux rectangulaires :

$$xOy, \quad yOz, \quad zOx.$$

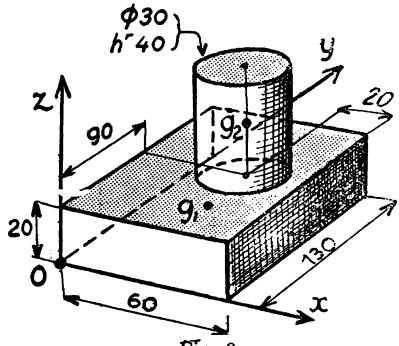


Fig. 9.

Appelons :

x_1, y_1, z_1, les coordonnées connues du point g_1;

x_2, y_2, z_2, celles du point g_2.

X, Y, Z, les coordonnées inconnues du point G.

I° Orientons les poids des volumes élémentaires parallèlement à Oz. Nous écrirons :

a) *Moments par rapport au plan* zOx.

$$VY = v_1y_1 + v_2y_2 \qquad (1)$$

b) *Moments par rapport au plan* yOz.

$$VX = v_1x_1 + v_2x_2 \qquad (2)$$

Nous déterminons ainsi les coordonnées X et Y du point G.

2° Orientons les poids des volumes élémentaires parallèlement à

l'axe Ox. La position du centre de gravité ne change pas. Le théorème des moments par rapport au plan xOy donne :

$$VZ = v_1 z_1 + v_2 z_2 \qquad (3)$$

Cette dernière relation permet d'évaluer la 3e coordonnée du point G. (*Voir Exercice* 3.)

Résumé.

1. Pour trouver le centre de gravité d'une figure, on la décompose en surfaces ou en volumes élémentaires dont on connaît les centres de gravité.

2. Dans le cas d'une surface, la somme algébrique des moments, par rapport à un axe choisi arbitrairement, des aires des surfaces élémentaires, est égale au moment par rapport au même axe de l'aire de la surface totale.

3. Dans le cas d'un volume, la somme algébrique des moments, par rapport à un plan choisi arbitrairement, des volumes élémentaires, est égale au moment par rapport au même plan, du volume total.

Exercices.

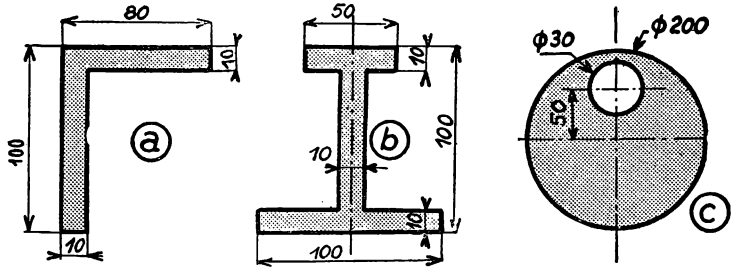


Fig. 10.

1. Déterminer par le calcul la position du centre de gravité des profils ci-dessus [fig. 10 : (*a*), (*b*), (*c*)].

2. Effectuer le calcul indiqué au paragraphe 4 en adoptant les dimensions portées sur la figure 8.

3. Pour le volume de la figure 9, trouver les distances du centre de gravité aux trois plans définis par le trièdre trirectangle $Oxyz$.

4. Calculer le centre de gravité de la pièce représentée par la figure 11 Choisir convenablement les trois plans de référence. Le diamètre du trou est de 15 *mm*.

5. On joint les milieux de deux côtés consécutifs d'un parallélogramme en tôle mince, et on enlève la partie triangulaire. Déterminer le centre de gravité de la partie restante.

6. Pour mesurer le poids P d'un mât MN et déterminer son centre de gravité G, on le pose successivement sur deux appuis A et B tels que MA = 3 *m* et MB = 3,5 *m*.

Sur l'appui A le mât demeure horizontal lorsqu'on place en M un poids de 52,5 *kg*. Lorsqu'il est sur l'appui B le

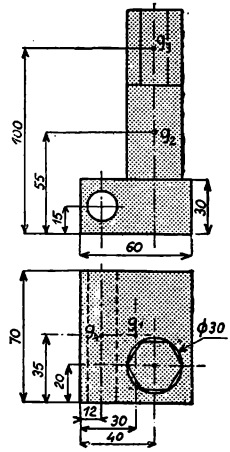


Fig. 11.

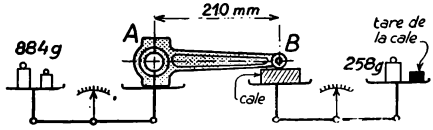


Fig. 12.

même équilibre est obtenu à l'aide d'un poids de 30 *kg* placé au même point.

Déterminer P et G en posant MG = x.

7. Pour déterminer la position du centre de gravité d'une bielle on peut procéder comme l'indique la figure 12. On *pèse* les poussées exercées par la bielle sur les plateaux de deux balances différentes.

Déterminer ce centre dans le cas de figure.

Théorèmes de Guldin

APPLICATIONS A LA DÉTERMINATION DE CENTRES DE GRAVITÉ

Lorsqu'une *ligne plane*, de forme quelconque, *tourne autour d'un axe situé dans son plan*, elle engendre une *surface de révolution*.

De même, *l'aire plane* d'un contour fermé engendre en *tournant autour d'un axe situé dans son plan* un volume de révolution.

Les théorèmes de Guldin établissent une relation simple entre :

a) la surface de révolution et la circonférence décrite par le centre de gravité de la ligne plane qui l'a engendrée;

b) le volume de révolution et la circonférence décrite par le centre de gravité de l'aire plane qui l'a engendrée.

1. Premier théorème de Guldin : aire engendrée par une ligne plane.

Soit une ligne plane quelconque et un axe $x'x$ de son plan ne la traversant pas (fig. 1). ***L'aire de la surface engendrée par cette ligne au cours d'une révolution complète autour de $x'x$, est égale au produit de sa longueur par la longueur de la circonférence décrite par son centre de gravité.***

$$S = L \times 2\pi \times Gg$$

A. — *Considérons d'abord l'aire engendrée par un segment de droite* AB = a qui tourne autour de l'axe $x'x$ situé dans son plan et ne le traversant pas. Le centre de gravité G, milieu de AB, est à une distance Gg de l'axe.

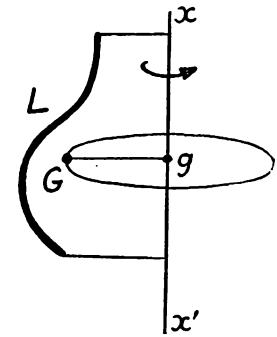


Fig. 1. — L'aire de la surface engendrée par la ligne L, de centre de gravité G, est : $S = L \times 2\pi \times Gg$.

1er Cas : *AB est parallèle à $x'x$* (fig. 2).

L'aire engendrée est l'aire de la surface latérale d'un cylindre :

$$S = 2\pi r \times a = AB \times 2\pi \times Gg$$

S = longueur AB × longueur de la circonférence décrite par G.

2e Cas : *AB est oblique à x'x* (fig. 3).

L'aire engendrée est l'aire de la surface latérale d'un tronc de cône :

$$S = \pi a\,(R + r).$$

Mais $R + r = 2\,Gg$, d'où

$$S = AB \times 2\pi \times Gg.$$

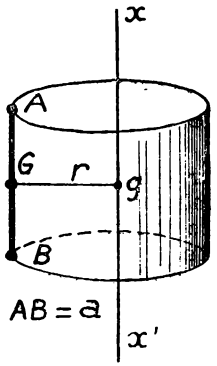


Fig. 2.

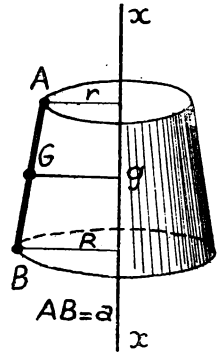


Fig. 3.

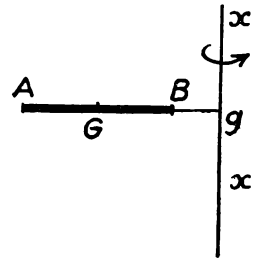


Fig. 4.

Vérifiez que l'on a bien, dans ces trois cas de figure

Aire engendrée par AB = S = AB × 2π × Gg.

3e Cas : *AB est perpendiculaire à x'x* (fig. 4).

Le segment engendre, au cours d'une révolution complète, une couronne circulaire dont l'aire :

$$S = \pi\,(\overline{Ag}^2 - \overline{Bg}^2) = \pi\,(Ag + Bg)\,(Ag - Bg).$$

Or, $Ag - Bg = AB$; $Ag + Bg = 2\,Gg$.

D'où $S = AB \times 2\pi \times Gg$.

B. — *Soit une ligne plane polygonale ABCD* qui tourne autour de l'axe *x'x* situé dans son plan et ne la traversant pas (fig. 5). L'aire de la surface engendrée est égale à la somme des aires engendrées par chacun de ses segments.

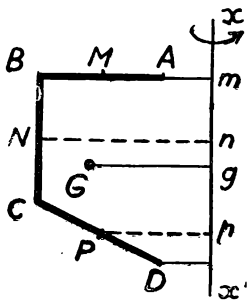


Fig. 5.

Aire engendrée par AB = AB × 2π × M*m*

— — — BC = BC × 2π × N*n*

— — — CD = CD × 2π × P*p*

L'aire totale

$$S = 2\pi\,[AB \times Mm + BC \times Nn + CD \times Pp].$$

Soient : G le centre de gravité de la ligne polygonale ABCD,

Gg sa distance à l'axe *x'x*.

Nous déterminerons G par la méthode des moments, de la même manière que pour la recherche du centre de gravité d'une surface :

$$AB \times Mm + BC \times Nn + CD \times Pp = (AB + BC + CD)\, Gg.$$

Par suite :

$$S = (AB + BC + CD) \times 2\pi \times Gg.$$

C. — *Considérons maintenant une ligne plane quelconque de longueur L et de centre de gravité connu G* (fig. 6).

Inscrivons dans cette ligne une ligne polygonale quelconque ABCDEF.

Le calcul précédent s'applique à cette ligne, quel que soit le nombre des côtés. Lorsque celui-ci croît indéfiniment, c'est-à-dire lorsque la ligne polygonale se confond avec la ligne courbe donnée, on peut encore écrire :

$$S = L \times 2\pi \times Gg.$$

Le théorème est démontré.

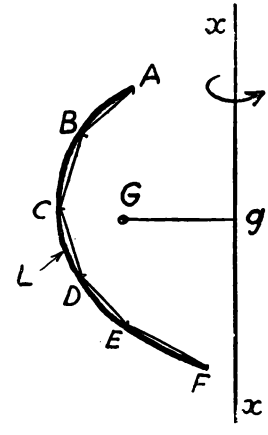


Fig. 6.

2. Application : Déterminer le centre de gravité d'une demi-circonférence.

Soit G le centre de la demi-circonférence (fig. 7). Il se trouve sur l'axe de symétrie de l'arc AMB, c'est-à-dire sur le rayon OM perpendiculaire au diamètre $x'x$.

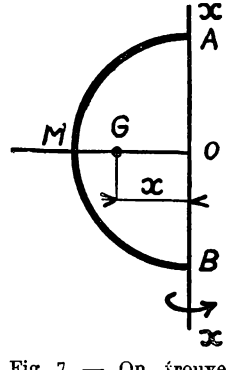


Fig. 7. — On trouve ici que : $x = 0{,}636\ R$ ($R = OA$).

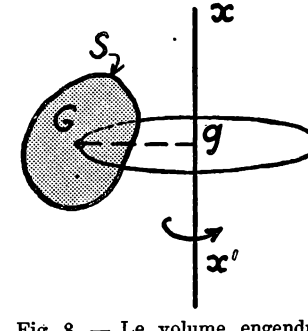


Fig. 8. — Le volume engendré par la surface S, de centre de gravité G, est :

$$V = S \times 2\pi \times Gg.$$

La demi-circonférence engendre en tournant autour de ce diamètre la surface d'une sphère dont l'aire :

$$S = 4\pi R^2 \qquad (R : \text{rayon de la circonférence})$$

La longueur de l'arc AMB est égal à πR. Posons $OG = x$.
Le théorème de Guldin relatif aux aires nous donne :

$$\pi R \times 2\pi x = 4\pi R^2$$

d'où

$$x = \frac{2R}{\pi} = 0{,}636\ R.$$

3. — Deuxième théorème de Guldin : volume engendré par une surface plane.

Soit une surface plane et un axe $x'x$ de son plan qui ne la traverse pas (fig. 8). ***Le volume engendré par cette surface au cours***

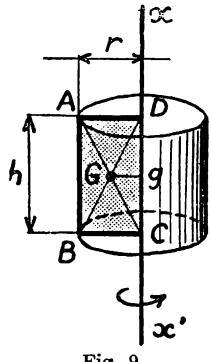


Fig. 9.

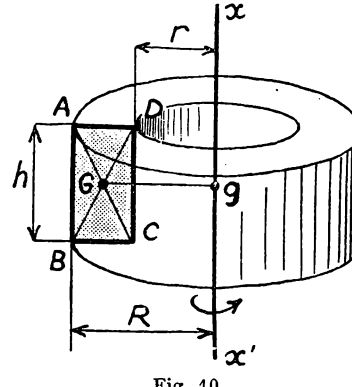


Fig. 10.

d'une révolution complète autour de $x'x$, est égale au produit de son aire par la longueur de la circonférence décrite par son centre de gravité.

$$V = S \times 2\pi \times Gg$$

Vérifions ce théorème dans deux cas particuliers.

1er Cas. Sur la figure 9 le rectangle ABCD tourne autour de l'axe $x'x$. Cet axe, confondu avec le côté CD, ne traverse pas le rectangle.

Le cylindre engendré a pour volume : $V = \pi r^2 h$.

On peut écrire : $V = rh \times \pi r$ = aire ABCD $\times\ \pi r$.

Comme $r = 2\,Gg$, on a bien :

$$V = \text{aire ABCD} \times 2\pi \times Gg$$

V = aire ABCD × longueur de la circonférence décrite par G.

2e Cas. Sur la figure 10, le volume engendré est un anneau cylindrique.

$$V = \pi\,(R^2 - r^2)\,h = \pi\,(R - r)\,(R + r)\,h.$$

Or $h = AB$; $R - r = AD$; $R + r = 2 \times Gg$.

Le volume V s'écrit :

$$V = AB \times AD \times 2\pi\ Gg$$

V = aire ABCD × longueur de la circonférence décrite par G.

CAS GÉNÉRAL. — Considérons l'aire plane S d'un contour fermé de forme quelconque (fig. 11) et un axe $x'x$ situé dans son plan.

Décomposons cette surface en petites bandes rectangulaires parallèles à $x'x$, chacune d'elles engendre par sa rotation autour de $x'x$ un anneau cylindrique. Le volume total est égal à la somme des volumes élémentaires ainsi constitués.

$$V = \text{aire ABCD} \times 2\pi \times g_1 g'_1 + \text{aire MNEF} \times 2\pi \times g_2 g'_2 + \ldots$$
$$= 2\pi\ (\text{aire ABCD} \times g_1 g'_1 + \text{aire MNEF} \times g_2 g''_2 + \ldots).$$

Nous reconnaissons la quantité entre parenthèses (1). Elle est égale au produit de l'aire totale S' des bandes par la distance à l'axe $x'x$ de son centre de gravité G'.

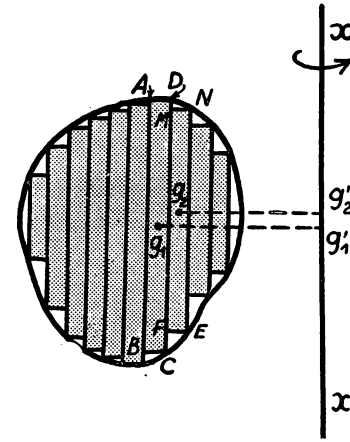


Fig. 11.

Si nous faisons croître indéfiniment le nombre des bandes, l'aire S' tend vers l'aire S limitée par le contour donné, dont le centre de gravité G est à une distance Gg de l'axe $x'x$ (fig. 8). La quantité entre parenthèses tend donc vers la valeur : $S \times Gg$.

Par suite :

$$V = 2\pi \times S \times Gg = S \times 2\pi \times Gg$$

$2\pi \times Gg$ n'est autre que la longueur de la circonférence décrite par le centre de gravité. Le théorème énoncé est donc démontré.

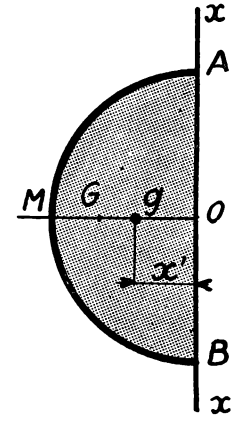


Fig. 12.

4. Application. — Déterminer le centre de gravité d'un demi-cercle (fig. 12).

Appelons g le centre de gravité du demi-cercle AMB (fig. 12). Il se trouve sur l'axe de symétrie OM perpendiculaire à AB. Posons $Og = x'$.

L'aire AMB, de valeur $\frac{\pi R^2}{2}$, engendre en tournant autour de AB une sphère de volume $\frac{4}{3}\pi R^3$.

1. Voir Calcul du centre de gravité d'une figure.

Appliquons le théorème de Guldin relatif aux volumes :

$$\frac{\pi R^2}{2} \times 2\pi x' = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

D'où $$x' = \frac{4R}{3\pi} = 0{,}424\ R.$$

REMARQUE. — Le centre de gravité G *de la ligne* AMB est à gauche du centre de gravité *g de la surface* AMB. En effet :

$$OG = 0{,}636\ R \qquad Og = 0{,}424\ R \qquad OG = \frac{3}{2}\,Og.$$

Résumé

1. Lorsqu'une ligne plane tourne autour d'un axe situé dans son plan et ne la traversant pas, l'aire engendrée par cette ligne au cours d'une révolution complète est égale au produit de sa longueur L par la circonférence que décrit son centre de gravité.

$$\boxed{S = L \times 2\pi \times Gg}$$

2. Lorsqu'une surface plane tourne autour d'un axe situé dans son plan et ne la traversant pas, le volume qu'elle engendre, au cours d'une révolution complète, est égal au produit de son aire S par la circonférence décrite par son centre de gravité.

$$\boxed{V = S \times 2\pi \times Gg}$$

Exercices

1. Trouver le volume engendré par un triangle équilatéral de côté C = 4*cm* qui tourne autour d'un axe de son plan situé à 15 *cm* du centre de gravité du triangle.

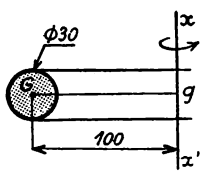


Fig. 13.

2. Trouver l'aire latérale du *tore* de révolution défini par la figure 13 ci-contre.

3. Déterminer le centre de gravité d'un arc de cercle de rayon 15 *cm* dont la corde mesure 15 *cm*. (L'aire engendrée est celle d'une zone sphérique.)

4. Evaluer le volume du tore de révolution défini à l'exercice 2.

5. L'aire d'une ellipse d'axes 2*a* et 2*b* a pour valeur πab (fig. 14). En la faisant tourner autour de $x'x$ elle engendre un ellipsoïde de révolution dont le volume $V_1 = \frac{4}{3}\pi a^2 b$. Si on la fait tourner au tour de yy' elle engendre un autre ellipsoïde de volume $V_2 = \frac{4}{3}\pi ab^2$. En déduire dans chaque cas la position du centre de gravité d'une demi-ellipse.

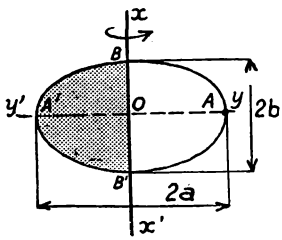


Fig. 14.

6. Les surcharges de fonte d'un accumulateur hydraulique sont formées de demi-rondelles (*diamètre intérieur :* 0,50 *m ; diamètre extérieur :* 1,30 *m*).

Pour faciliter leur manœuvre on perce dans chacune d'elles un trou dans lequel on visse un crochet. Déterminer la position de ce trou pour que chaque rondelle demeure horizontale lorsqu'on la soulève.

Équilibre d'un point matériel ou d'un corps solide.

Nous nous proposons d'étudier les conditions auxquelles doivent satisfaire les ***forces appliquées***[1] à un point matériel ou à un corps solide pour que celui-ci demeure *en équilibre*, c'est-à-dire au repos. *Ces conditions d'équilibre ne tiennent pas compte du frottement.*

1. ÉQUILIBRE DU POINT MATÉRIEL

1. Définition du point matériel libre et du point matériel gêné.

Un point matériel est un solide de dimensions très petites. Les forces qu'on peut lui appliquer sont donc *concourantes;* elles ont par suite une résultante.

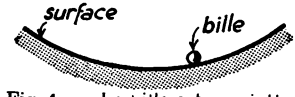


Fig. 1. — La bille est assujettie à se mouvoir sur la surface. C'est un *point matériel gêné.*

1° ***Un point matériel est libre*** *s'il peut se déplacer dans l'espace suivant la direction de la résultante des forces qui lui sont appliquées.*

EXEMPLE. — Un grain de poussière entraîné par un tourbillon est un point matériel libre.

2° Un ***point matériel est gêné*** *si son déplacement est assujetti à des liaisons.*

EXEMPLE. — Une perle enfilée sur un fil de fer courbé ne peut glisser que sur cette ligne.

De même une petite bille peut être astreinte à se mouvoir sur une surface, plane ou quelconque (fig. 1).

1. Équilibre du point matériel libre.

Pour qu'un point matériel libre soit en équilibre sous l'action des forces qui le sollicitent, il faut et il suffit que la résultante R de ces forces soit nulle.

1° *La condition est nécessaire :* car si la résultante n'était pas nulle, le point matériel se déplacerait sous l'action de cette résultante. Or, il est en équilibre par hypothèse.

2° *La condition est suffisante :* car si la résultante est nulle, le système des forces considéré est en équilibre. Si on l'applique au point matériel au repos, il n'en modifie pas l'état extérieur, c'est-à-dire son état de repos.

1. Dans ce qui suit les *forces appliquées* désignent l'ensemble des forces qui sollicitent le corps ou le point matériel *excepté les réactions aux appuis* lorsque ces appuis existent.

3. Équilibre d'un point matériel sur une courbe fixe.

Pour qu'un point matériel gêné soit en équilibre sur une courbe fixe, il faut et il suffit que la résultante R des forces qui lui sont appliquées soit normale à la courbe et qu'elle appuie le point sur la courbe.

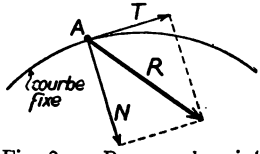


Fig. 2. — Pour que le point matériel A soit en équilibre, il faut et il suffit que R soit normale et qu'elle appuie le point sur cette courbe.

Remarquons tout d'abord que la force R doit *appuyer* le point sur la courbe, sinon le point quitterait celle-ci et la liaison ne serait plus observée.

1° *La condition est nécessaire*, car si la résultante R n'était pas normale à la courbe, on pourrait la décomposer en deux autres (fig. 2) :

— l'une N, *normale* à la courbe, qui appuierait le point sur celle-ci;

— l'autre T, *tangente* à la courbe, dont l'effet serait de faire glisser le point qui ne saurait alors rester en équilibre.

2° *La condition est suffisante*, car si R est normale à la courbe et appuie le point sur celle-ci, aucun mouvement ne saurait avoir lieu sous son action.

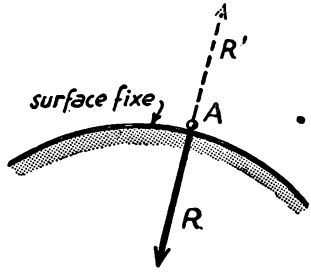


Fig. 3. — Pour que le point matériel A soit en équilibre, il faut et il suffit que R soit normale à la surface fixe et qu'elle appuie le point sur cette surface.

4. Équilibre d'un point matériel sur une surface fixe.

Un raisonnement identique au précédent permet d'énoncer :

Pour qu'un point matériel gêné soit en équilibre sur une surface fixe, il faut et il suffit que la résultante R des forces qui lui sont appliquées soit normale à la surface et qu'elle appuie le point sur cette surface (fig. 3).

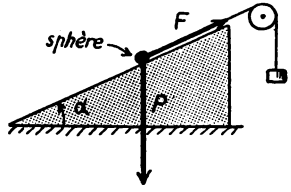


Fig. 4. — La sphère est en équilibre si la résultante des forces F et P est perpendiculaire au plan incliné.

EXEMPLES. — Une bille posée sur une table horizontale est soumise à son *poids* qui est perpendiculaire au plan de la table et qui l'appuie dessus.

La sphère posée sur le plan incliné de la figure 4 est soumise à la *traction* F et à son *poids* P. Elle demeure immobile si la résultante des forces F et P est normale au plan et appuie la sphère sur ce plan.

REMARQUE. — La résultante R, normale au support (courbe ou surface), appuie le point sur celui-ci. A

son tour le support exerce sur le point une *réaction* R′ égale et directement opposée (fig. 3).

Adjoignons au système des forces données, dont la résultante est R, la force R′. Nous pouvons alors, sans troubler l'équilibre, supprimer la courbe ou la surface sur laquelle repose le point matériel. Ainsi la force R′ remplace la liaison et c'est pourquoi on l'appelle *force de liaison.*

Nous dirons que le système des forces données et la force de liaison forment un système de forces en équilibre.

II. ÉQUILIBRE DU CORPS SOLIDE

5. Définition du corps solide libre ou gêné.

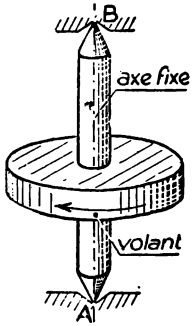


Fig. 5. — Le volant est un *corps solide gêné* assujetti à tourner autour d'un axe fixe.

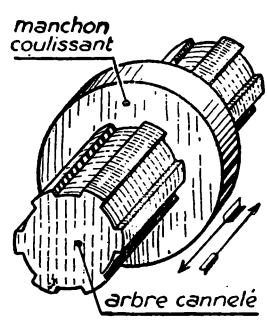


Fig. 6. — Le manchon est un corps solide gêné assujetti à glisser le long de l'arbre cannelé.

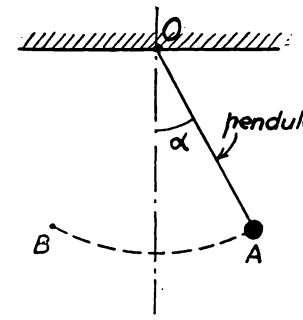


Fig. 7. — Le pendule est un corps solide gêné assujetti à tourner autour d'un point fixe O.

Observons des corps en mouvement.

Certains comme les véhicules se déplacent sur la *surface* du sol, d'autres comme les poulies ou volants tournent autour d'un *axe fixe* (fig. 5) ou sont astreints à glisser suivant une *direction* donnée (fig. 6). D'autres enfin comme le pendule, le levier à rotule (fig. 7 et 8), sont mobiles autour d'un *point fixe.*

Nous dirons qu'***un corps solide est gêné*** *s'il est assujetti à se mouvoir autour d'un point fixe, ou autour d'un axe fixe, ou sur une surface fixe.*

Par opposition, ***un corps solide est libre*** *s'il peut se mouvoir dans l'espace sous la seule action des forces qui lui sont appliquées.*

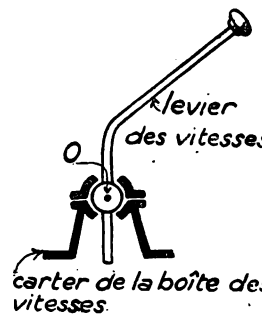


Fig. 8. — Le levier est assujetti à tourner autour du point fixe O. C'est un corps solide gêné.

EXEMPLES. — Un ballon sphérique, une pierre qu'on vient de lancer en l'air sont des corps libres.

6. Équilibre du corps solide libre.

Pour qu'un corps solide libre soit en équilibre, il faut et il suffit que le système des forces qui le sollicitent ait une résultante générale nulle et un couple résultant nul.

1° *La condition est nécessaire.* En effet, si après réduction en un point quelconque O du corps des forces qui le sollicitent, nous obtenions une résultante R non nulle et un couple résultant différent de 0, le corps prendrait :

un mouvement de translation dû à la force R;

un mouvement de rotation dû au couple résultant.

Or, par hypothèse, le corps est au repos. Il faut donc que l'on ait simultanément :

$$R = 0 \qquad \mathfrak{M} = 0$$

2° *La condition est suffisante :* car si R et $\mathfrak{M}$ sont nuls simultanément, le système des forces considérées est en équilibre et ne modifie pas l'état extérieur du corps auquel il est appliqué.

EXEMPLE. — Considérons un ballon immobile dans l'espace. Les forces qui le sollicitent sont :

les poids de ses diverses parties;

les forces pressantes exercées par l'air atmosphérique.

Toutes ces forces ont une résultante nulle et un moment résultant nul.

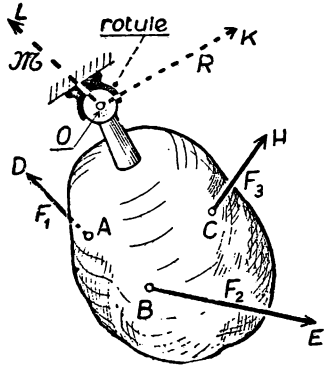


Fig. 9. — Le corps est en équilibre autour du point O, si après réduction des forces en ce point, $\mathfrak{M} = 0$. La réaction R′ du point fixe est égale et opposée à R.

7. Équilibre d'un corps solide mobile autour d'un point fixe.

Pour qu'un corps solide mobile autour d'un point fixe soit en équilibre, il faut et il suffit que le système des forces qui lui sont appliquées se réduise en ce point à une force unique

1° *La condition est nécessaire.* Après réduction au point fixe O des forces appliquées au corps solide, nous obtenons, en général, une résultante R et un couple résultant de moment $\mathfrak{M}$ (fig. 9).

Pour que le corps ne tourne pas autour de O, il faut que $\mathfrak{M} = 0$. Il

reste alors la force R qui est équilibrée par la réaction R′ du point fixe.

2° *La condition est suffisante, car* si $\mathfrak{M} = 0$, la force R appliquée en O, équilibrée par la réaction R′ de ce point, ne modifie pas l'équilibre du corps.

REMARQUE. — Nous pouvons dire que les forces appliquées au corps solide et la réaction du point fixe forment un système en équilibre.

8. Équilibre d'un corps solide mobile autour d'un axe fixe.

Une pièce montée entre les pointes d'un tour est un solide mobile autour d'un certain axe géométrique. Aucun glissement le long de cet axe n'est possible; la pièce peut seulement tourner.

Soit S le système des forces appliquées à un solide mobile autour d'un axe $x'x$. On peut le réduire à deux forces :

— l'une, F, appliquée en un point O choisi à volonté, sur l'axe $x'x$ (fig. 10);

— l'autre F_1, appliquée en un certain point A. Pour que le corps demeure en équilibre, il faut évidemment que la force F_1 rencontre l'axe, *c'est-à-dire que son moment par rapport à cet axe soit nul.* Comme le moment de la force F par rapport à $x'x$ est nul aussi, la somme des moments de ces deux forces est également nulle.

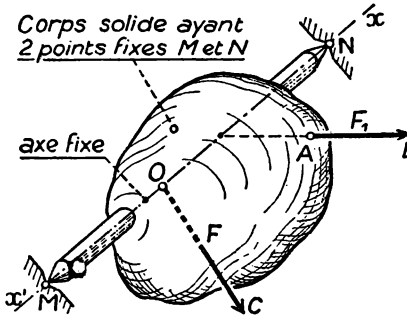


Fig. 10. — Le corps est en équilibre autour de l'axe $x'x$ si la somme algébrique des moments de toutes les forces, par rapport à $x'x$, est nulle.

Or le système des forces (F, F_1) est équivalent au système S; donc, la somme des moments des forces qui constituent ce système, par rapport à l'axe $x'x$, est nulle. D'où le théorème :

Pour qu'un corps solide mobile autour d'un axe fixe soit en équilibre, il faut et il suffit que la somme algébrique des moments, par rapport à cet axe, des forces qui lui sont appliquées soit nulle.

REMARQUE. — Les forces F et F_1, ou le système équivalent S, définissent avec les réactions des appuis M et N, un système de forces en équilibre.

9. Application. — Calcul du contrepoids d'une soupape de sûreté.

Soit un levier de soupape de sûreté (fig. 11). Sur la barre OB, mobile autour de l'axe O perpendiculaire au plan de figure, sont *appliquées* par trois forces :

1° *le poids propre* p du levier que nous supposerons appliqué en son milieu;

2° la *poussée verticale* F de la vapeur sur la soupape (diamètre = 2 *cm*), transmise à la barre en A par la tige de soupape;

3° la *charge verticale* Q du contrepoids.

La pression maximum de la vapeur étant de 20 *kg/cm²*, la poussée F sur la soupape est alors :

$$F = 20 \times \pi \times 1^2 = 20 \times 3{,}14 = 63\ kgp$$

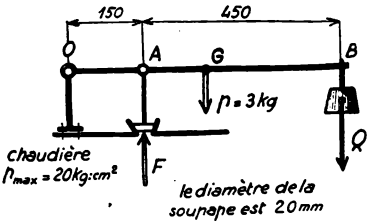


Fig. 11. — Calculez le poids Q de manière à ce que la soupape soit sur le point de se soulever quand la pression atteint la valeur 20 *kg/cm²*.

Lorsque la soupape est sur le point de quitter son siège, le levier OB est en équilibre horizontal. La somme algébrique des moments des forces F, *p*, Q, par rapport à l'axe de rotation, est donc nulle :

$$\mathfrak{M}_{(O)}\,F + \mathfrak{M}_{(O)}\,p + \mathfrak{M}_{(O)}\,Q = 0$$

Soit :

$$OA \times F - OG \times p - OB \times Q = 0$$

Prenons comme unité de longueur le centimètre :

$$OA = 15; \quad OG = 30; \quad OB = 60.$$

Nous aurons : $15 \times 63 - 30 \times 3 - 60 \times Q = 0$

d'où $$Q = \frac{855}{60} = \mathbf{14{,}25\ kgp}$$

Remarque. — La résultante R des forces F, *p*, Q, est parallèle aux composantes. $R = F - (p + Q) = 63 - (3 + 14{,}25) = 45{,}75\ kgp$. Son sens est celui de la force F. Son moment par rapport à l'axe O est nul, puisque la somme algébrique des moments des composantes, par rapport au même axe, est nulle par hypothèse. Donc son bras de levier est nul : la force R rencontre l'axe de rotation et tire sur le support de celui-ci.

Réciproquement le support exerce à l'extrémité O de la barre une réaction égale et directement opposée à R.

10. Équilibre d'un corps solide reposant sur un plan fixe.

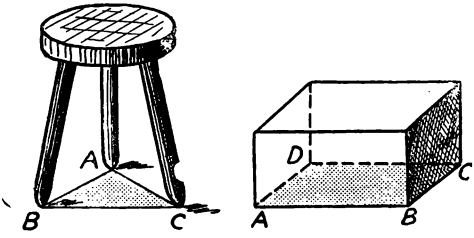


Fig. 12. — Ces corps ont, avec le sol, plusieurs points de contact. Quelles sont leurs bases de sustentation?

Un corps solide posé sur un plan fixe a, en général, plusieurs points de contact (fig. 12). Le contour fermé qui joint les points les plus extérieurs définit la *base de sustentation*. Celle-ci peut avoir une forme quelconque (fig. 13) ou se réduire à une droite ou un point (fig. 14).

Pour qu'un corps solide reposant sur un plan fixe soit en équilibre, il faut et il suffit que le système des forces qui lui sont appliquées se réduise à une force unique :

1° ***normale au plan et qui appuie le corps sur ce plan;***

2° ***qui passe à l'intérieur de la base de sustentation.***

1er CAS. — *Le corps solide a un seul point d'appui O* (fig. 15).

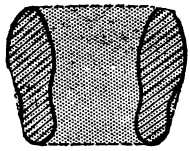


Fig. 13. — *Base de sustentation* du corps humain.

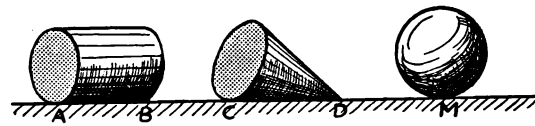


Fig. 14. — La base de sustentation peut se réduire à une droite ou un point.

Si nous réduisons en ce point les forces appliquées, il faut, pour que le corps reste en équilibre, que :

$\mathcal{M} = 0$ (aucune rotation).

R soit normale au plan (aucun glissement), et appuie le corps sur ce plan.

Inversement, si ces conditions sont réalisées, le corps demeure au repos.

Il résulte de ce qui précède que la réaction R′ du plan sur le corps est égale et directement opposée à R, donc *normale au plan;* elle forme avec les forces données un système en équilibre.

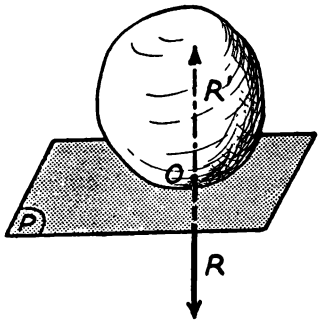


Fig. 15. — Le corps est en équilibre sur le plan P si les forces qui lui sont appliquées se réduisent en O à une résultante unique R, perpendiculaire au plan P.

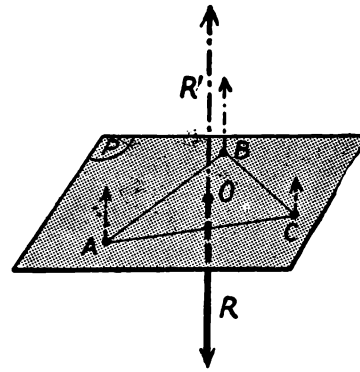


Fig. 16. — A, B et C sont les points de contact du corps avec le plan P. Il y a équilibre si les forces appliquées au corps se réduisent à une résultante R, perpendiculaire au plan P, et qui passe à l'intérieur de la base de sustentation.

2e cas. — *Le corps solide a une droite d'appui.*
Le raisonnement est analogue au précédent.

3e cas. — *Le corps solide a trois points d'appui ou plus.*
Soient, A, B, C les points d'appui. Les réactions en ces points sont

normales au plan (fig. 16); elles ont une résultante R′ qui leur est parallèle et dont le point d'application est à l'intérieur de la base de sustentation.

Ces réactions et le système S des forces données forment un système en équilibre. Il faut donc que S ait une résultante unique R égale et directement opposée à R′.

Inversement si le système des forces données se réduit à une force unique R, normale au plan et passant à l'intérieur de la base de sustentation, le corps demeure en équilibre. En effet, R peut se décomposer en trois forces appliquées en A, B, C et normales au plan. Elles sont équilibrées par les réactions de celui-ci.

Résumé

CONDITIONS GÉNÉRALES DE L'ÉQUILIBRE :

1° *D'un point matériel*

- ***libre :*** La résultante des forces appliquées doit être nulle.
- ***gêné :*** La résultante des forces appliquées doit être normale au support et doit appuyer le point sur celui-ci.

2° *D'un corps solide*

- ***libre :*** Le système des forces appliquées doit avoir une résultante générale nulle et un moment résultant nul.
- ***mobile autour d'un point fixe :*** Le système des forces appliquées doit se réduire en ce point à une force unique.
- ***mobile autour d'un axe fixe :*** La somme algébrique des moments, par rapport à cet axe, des forces appliquées doit être nulle.
- ***reposant sur un plan fixe :*** Le système des forces appliquées doit se réduire à une force unique normale au plan et qui appuie le corps solide sur ce plan.

Conséquence : Le système des forces données et les réactions des appuis forment, dans tous les cas, un système de forces en équilibre.

Exercices.

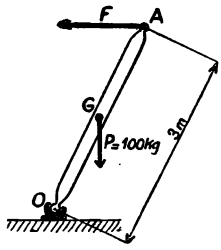


Fig. 17.

1. On considère le pendule de la figure 7. La sphère A, d'un poids P, est assimilée à un point matériel. Le fil OA oblige ce point à se mouvoir sur l'arc de cercle AB. Calculer en fonction de l'angle α : 1° la force horizontale F qu'il faut appliquer en A pour maintenir l'équilibre; 2° la tension du fil.

Application numérique : P = 250 *grammes poids* ; α = 40°.

2. Soit le point matériel de la figure 4. Quelle force F, parallèle au plan, faut-il exercer pour le maintenir en équilibre? Déterminer la réaction du plan.

Application numérique : P = 50 *grammes-poids* ; α = 60°.

3. Une barre pesant 100 *kgp* est mobile autour du point fixe O (rotule) et fait avec le plan horizontal un angle de 60° (fig. 17).

Déterminer la force F qui, parallèle au plan horizontal, maintient la barre en équilibre dans cette position.

Déterminer en grandeur, direction et sens la réaction R' du point fixe.

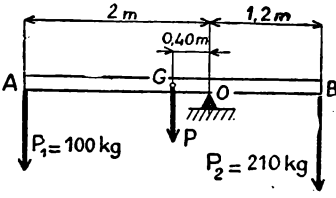


Fig. 18.

4. Une poutre homogène de section constante repose sur l'arête d'un couteau comme l'indique la figure 18.

Aux extrémités A et B s'appliquent des charges de 100 et 210 *kgp*. La barre demeurant horizontale, on demande quel est son poids P.

5. Un bras coudé dont les dimensions sont indiquées sur la figure 19 pèse 750 *gp*. Il est mobile autour de l'axe O. On demande quel doit être le poids du contrepoids qui réalise l'équilibre horizontal de la barre OA.

On admettra que les poids p_1 et p_2 des parties OA et OB sont proportionnels à leurs longueurs.

6. Etant donné un corps solide mobile autour d'un axe $x'x$ reposant sur deux paliers A et B, on réduit toutes les forces qui lui sont appliquées en un point de cet axe.

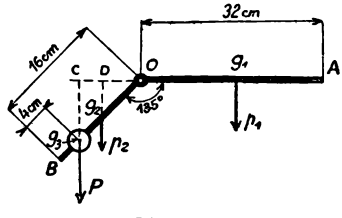


Fig. 19.

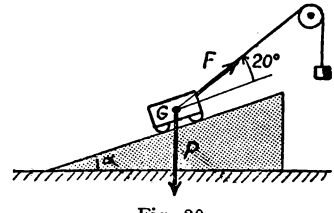


Fig. 20.

On obtient une résultante R et un couple résultant de moment $\mathcal{M}$ (représenté par un certain vecteur). Décomposer :

1° la force R suivant deux directions rectangulaires dont l'une est $x'x$;

2° le couple résultant suivant deux couples rectangulaires de moments $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ (Le vecteur moment $\mathcal{M}_1$ sera porté par $x'x$).

Analyser les effets des forces et des couples ainsi obtenus. En déduire les réactions des paliers.

7. Un chariot de poids P = 4 *kg*, posé sur un plan incliné, est tiré par une certaine force F qui le maintient en équilibre (fig. 20). L'angle α du plan est 30°. Calculer :

1° la force F ; 2° la réaction du plan.

Équations d'équilibre d'un corps solide.

Nous nous limiterons au cas d'un *corps solide sollicité par des forces situées dans un même plan.*

1. Définitions et propriétés relatives aux vecteurs.

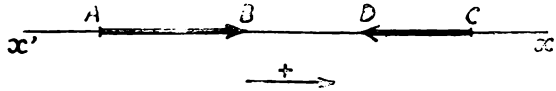


Fig. 1. — **Un axe** est une droite sur laquelle on a choisi un sens positif de parcours. **Ici :** le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est *positif*, le vecteur $\overrightarrow{CD}$ est *négatif*.

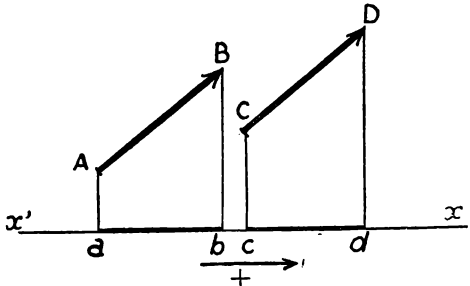


Fig. 2. — Les projections sur un axe $x'x$ de deux vecteurs équipollents sont égales et de même sens.

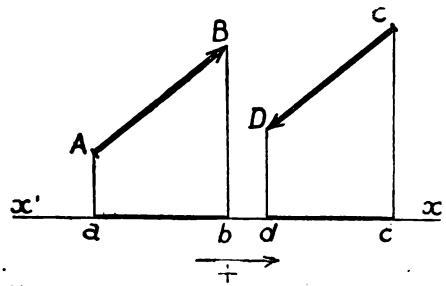


Fig. 3. — Les projections sur un axe $x'x$ de deux vecteurs opposés sont égales et de signes contraires.

Un ***axe*** est une droite sur laquelle on a choisi un sens de parcours qu'on appelle *sens positif.*

Rappelons :

1° qu'un ***vecteur*** est un segment de droite défini par son *origine* et son *extrémité ;*

2° que deux vecteurs sont dits ***équipollents*** s'ils sont parallèles, égaux et de même sens ;

3° que deux vecteurs sont dits ***opposés*** s'ils sont parallèles, égaux et de sens contraires.

Nous appellerons ***mesure d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$ porté par un axe*** (fig. 1) *le nombre algébrique qui a pour valeur absolue la mesure du segment AB avec une certaine unité, et pour signe le signe (+) ou le signe (—) selon que le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a même sens que l'axe ou un sens contraire.*

On désigne la mesure du vecteur $\overrightarrow{AB}$ par le symbole $\overline{AB}$.

Nous laissons au lecteur le soin de démontrer les propriétés suivantes :

Les projections sur un axe de deux vecteurs équipollents sont égales et de même sens (fig. 2).

Les projections sur un axe de deux vecteurs opposés sont égales et de sens contraires (fig. 3). La somme algébrique de leurs mesures est donc nulle.

2. Projection sur un axe de la résultante de deux forces concourantes.

Théorème : *La mesure de la projection sur un axe de la résultante de deux forces concourantes est égale à la somme algébrique des mesures des projections sur cet axe des composantes.*

Soient F_1 et F_2 deux forces concourantes en A (fig. 4 et 5). Elles sont représentées par les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, et leur résultante R par le vecteur $\overrightarrow{AD}$.

Projetons ces trois vecteurs sur l'axe $x'x$ de leur plan. Nous obtenons successivement :

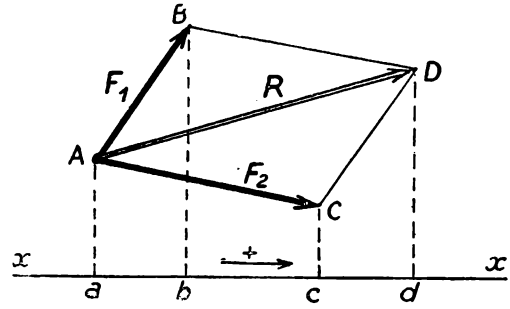


Fig. 4.

le vecteur $\overrightarrow{ab}$ dont la *mesure* est $\overline{ab} = X_1$

— $\overrightarrow{ac}$ — est $\overline{ac} = X_2$

— $\overrightarrow{ad}$ — est $\overline{ad} = X$

X_1, X_2, X sont donc des *nombres algébriques*.

Quelle que soit la disposition du parallélogramme des forces par rapport à l'axe $x'x$, nous pouvons écrire :

$$\overline{ad} = \overline{ac} + \overline{cd}.$$

Or, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ étant équipollents, leurs projections sur $x'x$ sont égales et de même sens : $\overline{cd} = \overline{ab}$.

Par suite $\overline{ad} = \overline{ac} + \overline{ab}$

ou $X = X_1 + X_2$.

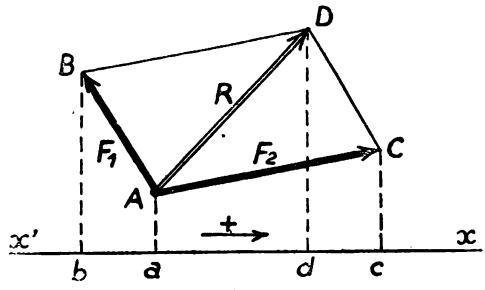


Fig. 5.

REMARQUE. — Le théorème s'étend sans difficulté au cas d'un nombre quelconque de forces concourantes :

Si X_1, X_2, X_3, X_4 sont les mesures des projections sur un axe $x'x$ des forces concourantes F_1, F_2, F_3, F_4, la mesure X de la projection sur cet axe de leur résultante est :

$$X = X_1 + X_2 + X_3 + X_4.$$

3. Condition pour que la résultante d'un système de forces situées dans un même plan soit nulle.

Théorème : *Étant donné un système de forces concourantes situées dans un même plan, et deux axes rectangulaires $x'x$, $y'y$, tracés dans ce plan, la condition nécessaire et suffisante pour que la résultante soit nulle est que la somme algébrique des projections de toutes ces forces sur chacun des axes soit nulle.*

Soient : X la projection de la résultante R sur l'axe $x'x$;
Y la projection de la résultante R sur l'axe $y'y$ (fig. 6).

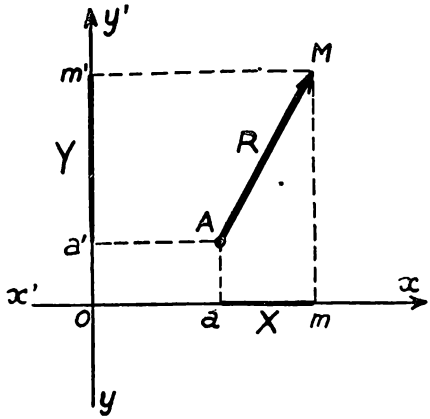


Fig. 6. — Pour que R = 0 il faut et il suffit que l'on ait simultanément :

$$X = 0; \quad Y = 0.$$

D'après le théorème précédent :

$$X = X_1 + X_2 + X_3 + \ldots;$$
$$Y = Y_1 + Y_2 + Y_3 + \ldots$$

1° *La condition est nécessaire.* En effet, si R est nulle, ses projections sur les axes $x'x$ et $y'y$ sont nécessairement nulles; par suite, on a séparément :

$$X_1 + X_2 + X_3 + \ldots = 0 \quad (1)$$
$$Y_1 + Y_2 + Y_3 + \ldots = 0$$

2° *La condition est suffisante,* c'est-à-dire que si les égalités (1) sont vérifiées, la résultante est nulle.

En effet : si $X_1 + X_2 + X_3 + \ldots = 0$, la projection X de la résultante R, sur l'axe $x'x$, est nulle. Deux cas peuvent se présenter :

1er *Cas:* R = 0 (projection nulle);
2e *Cas:* R perpendiculaire à $x'x$, donc parallèle à $y'y$ (projection sur $x'x$ nulle)

Mais comme par hypothèse :

$$Y_1 + Y_2 + Y_3 + \ldots = 0,$$

la projection Y de R sur l'axe $y'y$ est également nulle et le 2e cas ne saurait subsister. Donc R = 0.

4. Équations d'équilibre d'un corps solide libre.

Toutes les forces qui agissent sur le corps peuvent se réduire en un point quelconque de celui-ci à une résultante générale R et à un couple résultant de moment $\mathfrak{M}$.

Dans l'hypothèse de *forces situées dans un même plan* P, le vecteur qui représente le moment $\mathfrak{M}$ est perpendiculaire au plan P.

Nous avons vu que pour qu'il y ait équilibre il faut et il suffit que :

$$R = 0 \qquad \mathfrak{M} = 0.$$

1° Nous projetterons donc les forces appliquées au corps sur deux axes rectangulaires $x'x$, yy, choisis à volonté dans le plan P, et nous écrirons :

$$\left.\begin{array}{l} X_1 + X_2 + X_3 + \ldots = 0 \\ Y_1 + Y_2 + Y_3 + \ldots = 0 \end{array}\right\} \textbf{\textit{équations de projections.}}$$

2° Nous exprimerons que la somme algébrique des moments de ces forces par rapport à un point quelconque du plan P est nulle : nous aurons ainsi l'***équation de moments.***

Remarque. — Supposons que les forces appliquées au corps solide soient toutes dans un même plan et, en outre, *concourantes.* Le *moment résultant de ces forces par rapport au point de concours est évidemment nul.* Il y a donc équilibre si R = 0. Il suffit alors d'écrire les deux équations de projections.

Application numérique. — *Une barre AB de poids négligeable est sollicitée par les forces P, F, Q, R, situées dans un même plan et qui se font équilibre. Deux d'entre elles, P et F, sont verticales; les deux autres sont perpendiculaires à la barre* (fig. 7). *Celle-ci faisant un angle de* 30° *avec l'horizontale Ax, on demande de calculer les* 3 *forces P, Q, R, sachant que :*

$$F = 1\ kgp \ ; \ AD = 0{,}40\ m \ ; \ DC = 0{,}30\ m \ ; \ CB = 0{,}25\ m.$$

SOLUTION. — Choisissons les axes rectangulaires Ax et Ay comme il est indiqué sur la figure 7 et projetons sur eux les forces appliquées à la barre. Nous prendrons en outre les moments de toutes ces forces par rapport au point A.

Lorsque la barre est en équilibre on a :

Projections sur Ax^1 :

$$Q \cos 60^\circ - R \cos 60^\circ = 0 \qquad (1)$$

Projections sur Ay :

$$P - F - Q \cos 30^\circ + R \cos 30^\circ = 0 \qquad (2)$$

Sommes des moments :

$$-AH \times F - AC \times Q + AB \times R = 0 \qquad (3)$$

La première équation montre que $Q = R$. Si l'on tient compte de cette égalité dans l'équation (2) on voit que $P = F$.

Remplaçons R par son égal Q dans l'équation (3). Il vient :

$$-AH \times F - AC \times Q + AB \times Q = 0$$

ou $$(AB - AC)\, Q = AH \times F.$$

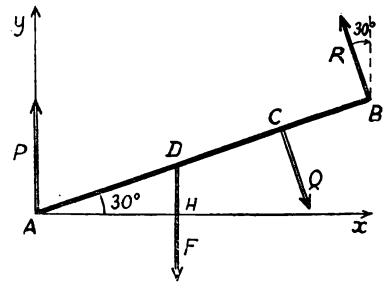


Fig. 7.

Or, $AB - AC = CB = 0{,}25\ m$, $AH = AD \cos 30^\circ = 0{,}4 \times 0{,}866 = 0{,}346\ m.$

Par suite $$Q = \frac{1 \times 0{,}346}{0{,}25} = 1{,}38\ kgp$$

Les résultats demandés sont donc :

$$P = F = 1\ kgp \ ; \ Q = R = 1{,}38\ kgp$$

5. Équations d'équilibre d'un corps solide gêné.

Rappelons que lorsqu'un corps solide gêné est en équilibre, les forces qui lui sont directement appliquées et les réactions des liaisons forment un système en équilibre.

Nous pouvons donc appliquer les équations d'équilibre relatives au corps solide libre à condition de faire intervenir dans chacune d'elles les réactions.

APPLICATION NUMÉRIQUE. — *Une échelle AB de longueur* 1 *et de poids P est appuyée contre* 2 *parois rectangulaires parfaitement polies dont l'une est verticale* (fig. 8). *Les réactions en A et B étant normales aux parois, quelle force horizontale faut-il appliquer en B pour maintenir l'échelle en équilibre ? Déterminer ces réactions.*

SOLUTION. — Les réactions en A et B sont normales aux parois. Soit F la force horizontale qu'il faut exercer au point B pour maintenir l'équilibre.

Projetons toutes les forces, y compris les réactions, sur Ox et Oy.

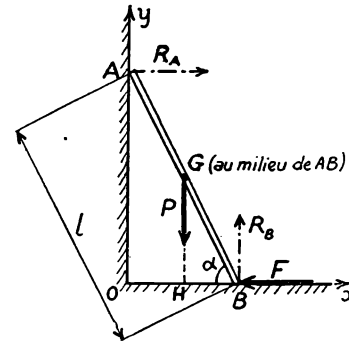


Fig. 8.

1. Il est commode, pour trouver l'*angle formé par une force et un axe dirigé* de procéder ainsi : soit à trouver l'angle de la force $\vec{Q}$ avec $\overrightarrow{Ax}$. Nous amenons d'abord $\overrightarrow{Ax}$ sur la direction $\overrightarrow{AB}$ en le faisant tourner de $+30^\circ$ autour de A; nous amenons ensuite $\overrightarrow{AB}$ sur $\vec{Q}$ en le faisant tourner de -90° autour de C.

Pour amener l'axe $\overrightarrow{Ax}$ à être parallèle à $\vec{Q}$, il a donc fallu le faire tourner d'un angle $+30^\circ - 90^\circ = -60^\circ$. C'est l'angle cherché du vecteur $\vec{Q}$ avec l'axe $\overrightarrow{Ax}$. On a donc :

$$\text{proj. de } \vec{Q} \text{ sur } Ax = Q \cos(-60^\circ) = Q \cos 60^\circ.$$

Sur Ox : $R_A - F = 0$ (1)

d'où : $F = R_A$.

Sur Oy : $R_B - P = 0$ (2)

d'où : $P = R_B$.

L'équation des moments de toutes les forces pris par rapport au point B s'écrit :

$$HB \times P - OA \times R_A = 0 \quad (3)$$

soit $HB \times P - OA \times F = 0$

D'où : $$F = \frac{HB \times P}{OA} = \frac{\frac{l}{2}\cos\alpha \times P}{l \sin\alpha} = \frac{P}{2\mathrm{tg}\alpha}$$

ce qui montre que F est d'autant plus petit que α est plus grand, c'est-à-dire que l'échelle est plus près de la verticale.

Résumé

1. Lorsqu'un corps solide est en équilibre sous l'action de forces situées dans un même plan P, on peut exprimer cet équilibre à l'aide de 3 équations :

1° *2 équations de projections :* On projette les forces données sur 2 axes rectangulaires quelconques du plan P et l'on écrit que la somme algébrique des projections ainsi obtenues est nulle sur chaque axe.

2° *1 équation de moments :* On écrit que la somme algébrique des moments de toutes les forces par rapport à un point quelconque du plan P est nulle.

2. Lorsque le corps considéré est assujetti à des liaisons, il faut tenir compte des réactions dans chacune de ces équations.

Exercices

1. Une barre AB rigide de poids P = 50 *kg* (fig. 9) s'appuie simultanément sur un mur vertical et sur un plancher horizontal qu'on suppose parfaitement polis (Réactions normales aux appuis).

Au point M, milieu de AG, s'exerce une force normale à la barre F = 20 *kgp*.

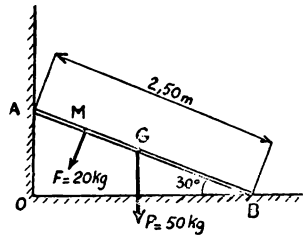


Fig. 9.

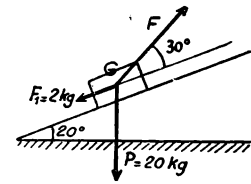


Fig. 10.

Déterminer la force horizontale F' qu'il faut exercer en B pour maintenir l'équilibre, lorsque l'angle α de la barre avec le plan horizontal est de 30°.

Calculer les réactions en A et B.

2. Un corps pesant 20 *kg* repose sur un plan incliné dont l'angle avec le plan horizontal est de 20° (fig. 10).

En outre, il est sollicité par une force $F_1 = 2$ *kgp*, parallèle au plan incliné, qui tend à le faire glisser vers le bas.

Soit F la force qui maintient le corps en équilibre. Calculer son intensité et la réaction du plan incliné (on suppose celle-ci normale au plan).

Équilibre d'un corps solide sous la seule action de son poids.

1. Condition générale d'un tel équilibre.

Au bord d'une coupe, abandonnons une petite bille d'acier (fig. 1). Son poids P tend à la faire tourner autour du point de contact. La bille descend, et après une série d'oscillations s'arrête au point le plus bas : son centre de gravité ne peut plus s'abaisser.

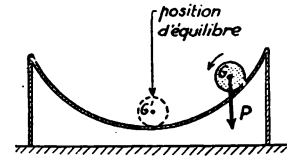


Fig. 1. — Le centre de gravité de la bille tend à se placer le plus bas possible.

Posons un tabouret sur un sol horizontal (fig. 2). Son poids P, appliqué au centre de gravité G, le tire constamment vers le bas; mais le point G ne peut s'abaisser : le tabouret demeure au repos.

D'une manière générale, ***un corps solide est en équilibre sous la seule action de son poids, lorsque ses appuis sont tels qu'ils ne permettent pas au centre de gravité de s'abaisser.***

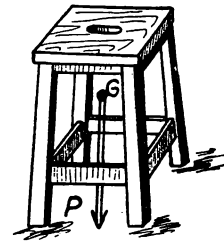


Fig. 2. — Le centre de gravité ne peut s'abaisser : le tabouret demeure en équilibre.

2. Différentes sortes d'équilibre.

1° ***L'équilibre est stable*** si le corps écarté de sa position d'équilibre y revient de lui-même.

EXEMPLE : une bille placée au point le plus bas d'une surface concave (fig. 3).

2° ***L'équilibre est indifférent*** si le corps reste en équilibre quand on l'écarte de sa position primitive.

EXEMPLES : une bille sur un plan horizontal; un volant mobile autour de son axe (fig. 4).

Fig. 3. — *Équilibre stable :* la bille écartée de cette position y revient après quelques oscillations.

3° ***L'équilibre est instable*** si le corps écarté de sa position d'équilibre tend à s'en écarter davantage.

EXEMPLES : une règle en équilibre sur l'arête d'un couteau; une bille au point le plus haut d'une surface convexe (fig. 5).

En pratique cet équilibre est irréalisable.

3. Équilibre d'un corps suspendu à un point fixe ou à un axe fixe *(équilibre sans frottement)*

Soit un corps mobile autour d'un point fixe O (fig. 6).

Lorsqu'il est au repos son poids P et la réaction F du point d'appui se font équilibre. Ces deux forces sont donc égales et directement opposées. Or, la première est verticale, dirigée vers le bas; par suite, la réac-

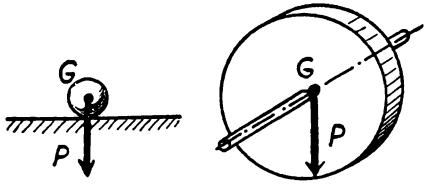


Fig. 4. — *Équilibre indifférent:* Ces corps restent en équilibre après qu'on les a déplacés.

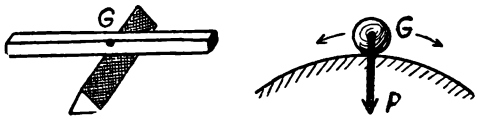


Fig. 5. — *Équilibre instable:* les corps écartés de cette position s'en écartent davantage.

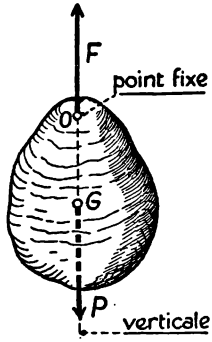


Fig. 6. — Le corps est suspendu en O. Il y a équilibre si la verticale du centre de gravité passe par O.

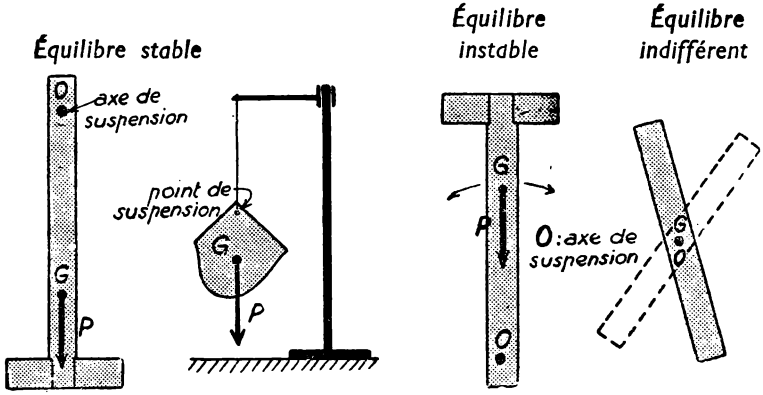


Fig. 7. — Voici différents cas d'équilibre de corps suspendus à un axe ou à un point fixe O.

tion F est verticale, dirigée vers le haut. Leurs droites d'action étant confondues, la verticale du centre de gravité passe par le point fixe O.

CONCLUSION. — *Pour que l'équilibre ait lieu il faut que la verticale du centre de gravité passe par le point fixe.* Cette condition est d'ailleurs suffisante.

Un raisonnement identique, pour le cas d'un corps mobile autour d'un axe fixe, permet d'énoncer une conclusion analogue.

Les expériences de la figure 7 montrent que :

1° L'équilibre est *stable* si le centre de gravité est placé *au-dessous* du point ou de l'axe de suspension et *instable* s'il est placé *au-dessus*.

2° L'équilibre est *indifférent* si le point G est confondu avec le point de suspension ou se trouve sur l'axe considéré.

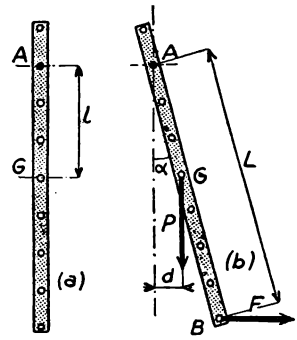


Fig. 8. — La *stabilité* est d'autant plus grande que le corps est lourd et que son centre de gravité est loin de l'axe de suspension.

4. Stabilité de l'équilibre d'un corps suspendu.

Soit une barre percée de trous équidistants, mobile autour d'un axe horizontal A (fig. 8).

Si nous l'écartons de sa position d'équilibre stable d'un certain angle α, son poids P tend à l'y ramener. Pour la maintenir en équilibre dans cette position, appliquons au point B une force horizontale F. Calculons son intensité.

Exprimons les moments par rapport à A des forces P et F :

$$\mathfrak{M}_{(A)}\ P = -d \times P = -l \sin \alpha \times P.$$
$$\mathfrak{M}_{(A)}\ F = L \cos \alpha \times F.$$

Il y a équilibre lorsque la somme algébrique des moments est nulle :

$$L \cos \alpha \times F - l \sin \alpha \times P = 0$$

D'où :

$$F = \frac{P \times l}{L} tg\ \alpha.$$

La force F qu'il faut appliquer *à une distance donnée* L, *pour écarter le corps d'un angle donné* α est donc proportionnelle :

1° au poids P du corps;

2° à la distance l du centre de gravité à l'axe de suspension.

Nous dirons que l'équilibre est d'autant plus *stable* que la force F est elle-même plus grande.

CONCLUSION. — *La stabilité d'un corps suspendu est d'autant plus grande que le corps est plus lourd et que son centre de gravité est plus éloigné de l'axe de suspension.*

5. Équilibre d'un corps reposant sur un plan horizontal *(équilibre sans frottement).*

Considérons un corps solide posé sur un plan horizontal. Les réactions aux divers appuis sont des forces verticales dont la résultante R′ est

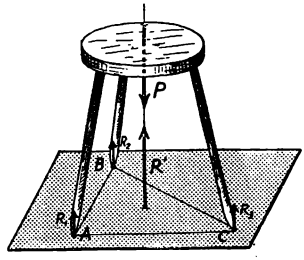


Fig. 9. — Le corps est posé sur un plan horizontal. Il y a équilibre si la verticale du poids P tombe à *l'intérieur* de la base de sustentation.

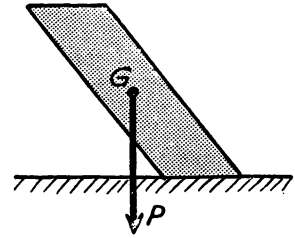


Fig. 10. — La verticale du centre de gravité tombe à l'extérieur de la base de sustentation : le corps tombe.

appliquée en un point situé à l'intérieur de la base de sustentation.

Le poids P et la force R′ forment un système en équilibre; par suite, *pour que le corps demeure en équilibre, il faut que la verticale du centre de gravité passe à l'intérieur de la base de sustentation* (fig. 9).

Si la verticale du point G tombe à l'extérieur de cette base (fig. 10) le corps bascule.

6. Stabilité de l'équilibre d'un corps reposant sur un plan horizontal.

EXPÉRIENCE. — Soit un parallélépipède de matière homogène de hauteur l reposant sur un plan horizontal (fig. 11) :

$$P = 1\,500\ gp \qquad d = 5\ cm$$

Pour le faire tourner autour de son arête AB, faisons agir une force F appliquée en C, le plus loin possible de l'arête AB, c'est-à-dire à la distance $l = 25\ cm$.

Mesurons F lorsque le solide est sur le point de basculer autour de l'arête AB. Nous trouvons : $F = 300\ gp$.

Or, $\quad d \times P = 5 \times 1\,500 = 7\,500\ cm.gp$

$\quad l \times F = 25 \times 300 = 7\,500\ cm.gp$

Donc, lorsque le solide va basculer :

$$d \times P = l \times F$$

De cette relation nous tirons : $F = P \times \frac{d}{l}$.

Cette égalité montre que la force F qui provoque la rotation est d'autant plus grande que :

1° le poids P du corps est plus grand;

2° d est plus grand, c'est-à-dire que la verticale du centre de gravité est loin de l'arête AB;

3° l est plus faible, c'est-à-dire que le corps est de faible hauteur.

La deuxième condition est réalisée en augmentant la base de sustentation. Quant à la troisième, elle revient à exprimer que le centre de gravité doit être aussi bas que possible puisque la hauteur l doit être réduite.

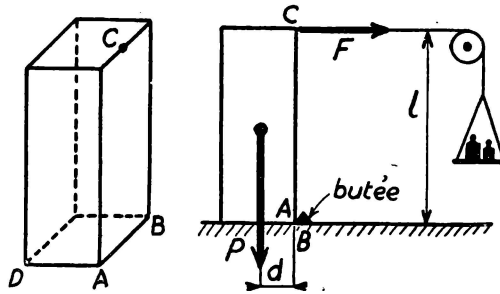


Fig. 11. — L'équilibre demeure stable tant que le *moment de renversement* : $l \times F$ est inférieur au *moment de stabilité* : $d \times P$.

CONCLUSION. — *La stabilité d'un corps reposant sur un plan horizontal est d'autant plus grande qu'il est plus lourd, qu'il a une plus grande base de sustentation, que son centre de gravité est plus bas.*

REMARQUE. — Le produit $d \times P$ s'appelle *moment de stabilité du corps solide autour de l'arête AB*. Pour une autre arête, ce moment prendrait en général une valeur numérique différente.

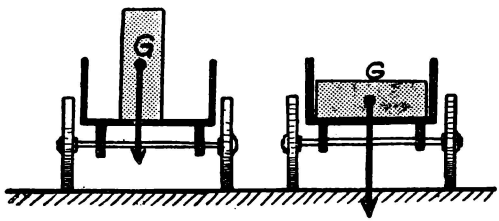


Fig. 12. — Pourquoi le chariot de gauche est-il moins stable que le chariot de droite?

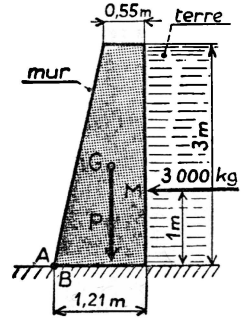


Fig. 13. — La poussée de la terre tend à faire basculer le mur autour de l'arête AB. A quelle condition l'équilibre est-il stable?

Le produit $l \times F$ s'appelle *moment de renversement.*

Le corps reste en équilibre stable si le moment de renversement est

inférieur au moment de stabilité. S'ils sont égaux le corps est sur le point de basculer.

7. Applications.

Pour charger une voiture, on place les corps les plus lourds le plus bas possible, ce qui abaisse le centre de gravité (fig. 12).

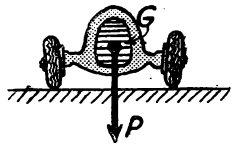


Fig. 14. — A quoi reconnaissez-vous la stabilité de cette voiture de course?

Pour éviter à un mur de soutènement ou de barrage de se renverser on augmente sa base de sustentation (fig. 13).

Les bâtis de machines ont, en général, une large semelle.

Les pieds d'un tabouret, d'une sellette, sont obliques, de manière à augmenter la base d'appui.

Les châssis surbaissés des automobiles ont pour but d'augmenter la stabilité des voitures. Une voiture de course (fig. 14) est particulièrement stable (centre de gravité bas — grande base de sustentation).

Résumé.

1. L'équilibre d'un corps pesant peut être stable, instable, indifférent.

2. L'équilibre d'un corps pesant suspendu en un point O ou à un axe x'x est stable lorsque :
la verticale du centre de gravité rencontre le point O ou l'axe x'x ;
le centre de gravité est placé au-dessous de l'axe xx' ou du point O.
La stabilité est d'autant plus grande que le corps est lourd et que le centre de gravité est loin du point O ou de l'axe de suspension.

3. Un corps reposant sur un plan horizontal est en équilibre stable lorsque la verticale du centre de gravité tombe à l'intérieur de la base de sustentation.
La stabilité est d'autant plus grande que le corps est lourd, que sa base de sustentation est grande, que son centre de gravité est bas.

Exercices.

1. Un bouchon est lesté d'une calotte de plomb (fig. 15). Expliquer pourquoi il est irrenversable.

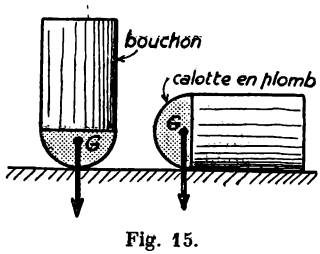


Fig. 15.

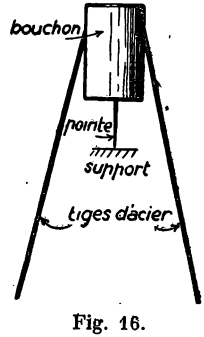


Fig. 16.

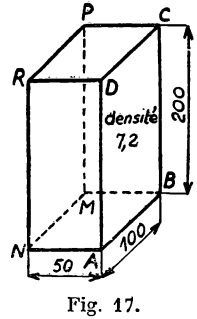


Fig. 17.

2. Pourquoi un bouchon lesté de tiges d'acier (fig. 16) tient-il en équilibre sur une pointe d'épingle?

3. Pourquoi le débardeur écarte-t-il les jambes lorsqu'on place une charge sur son dos?

4. On considère un parallélépipède de fonte homogène (fig. 17). Calculer les valeurs du moment de stabilité pour trois arêtes différentes.

5. Soit un mur de soutènement soumis à la poussée des terres (fig. 13) et pesant 2 000 *kilogrammes par* m^3.

1° Déterminer graphiquement le centre de gravité de la section, et en déduire la distance de la verticale du point G à l'arête AB.

2° Calculer le moment de stabilité du mur par mètre courant.

3° On suppose que la poussée des terres appliquée en M est une force de 3 tonnes par mètre courant, perpendiculaire à AB, et placée comme l'indique la figure. Calculer son moment de renversement et vérifier si le mur est stable.

6. *Stabilité d'une grue.*

Sous l'effet de la charge, la grue de la figure 18 tend à basculer. Pour l'en empêcher, on place un contrepoids Q du côté opposé à la charge.

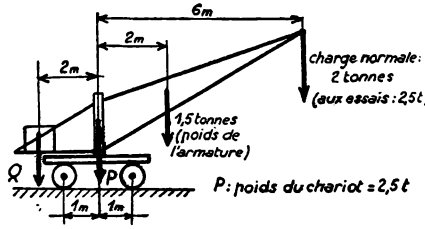


Fig. 18.

1° Calculer la valeur de ce contrepoids pour que, lors des essais, la résultante des forces appliquées passe par l'appui avant.

2° Montrer qu'à vide le moment de renversement du contrepoids autour de l'appui arrière est inférieur à la somme des moments des autres forces appliquées.

3° Calculer la résultante des forces parallèles appliquées à la grue à vide et en déduire les réactions des appuis.

Machines simples : Leviers.

1. Fait d'observation.

Pour soulever une lourde pierre le maçon utilise un ***levier*** (fig. 1). C'est une barre de fer, rigide, généralement coudée, dont il engage une extrémité aplatie sous le corps à soulever.

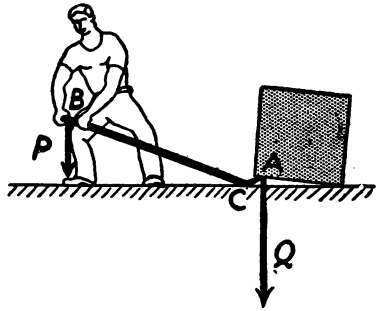


Fig. 1. — Le maçon utilise un **levier** quand il doit soulever une grosse pierre.

Le maçon appuie en B avec une force P ou ***force motrice*** [1]; la pierre appuie en A avec une force Q ou ***résistance;*** le levier pivote autour du ***point d'appui*** C.

DÉFINITION. — *Un levier est un corps solide, mobile autour d'un point ou d'un axe fixe* ***(appui)****, et sur lequel agissent deux forces : l'une dite* ***force motrice****, l'autre dite force résistante ou* ***résistance.***

2. Différents types de levier.

1. ***Levier inter-appui ou du 1er genre.*** Le levier du maçon a son

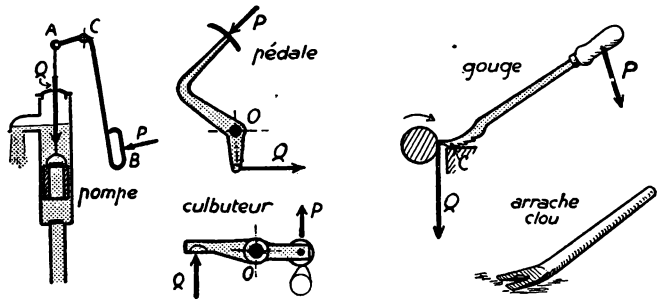


Fig. 2. — Voici des leviers du *premier genre*. Cherchez comment ils fonctionnent et montrez leur utilité. Y a-t-il pour l'un d'eux une erreur dans la disposition des forces P et Q?

1. L'emploi du mot *puissance* est à proscrire, car ce mot a encore un autre sens en mécanique.

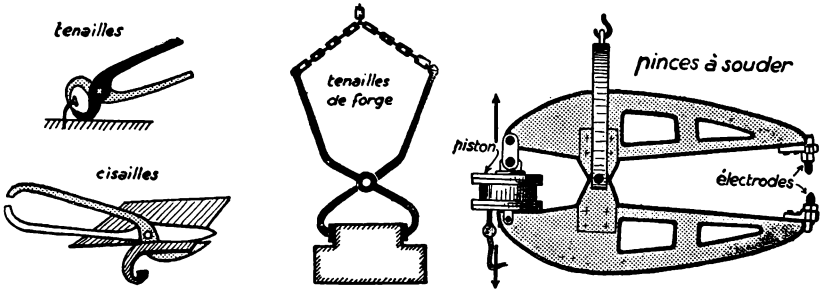


Fig. 3. — Voici quelques exemples de *leviers doubles* de premier genre. Quel est leur usage?

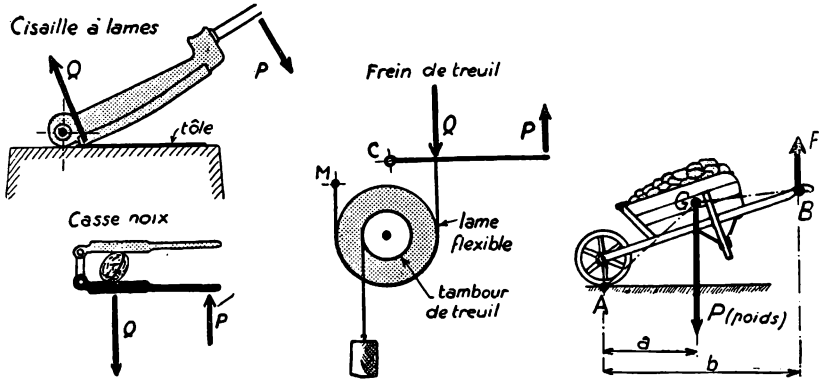


Fig. 4. — Ces machines — ou organes de machines — sont des leviers du *deuxième genre.* Montrez pourquoi.

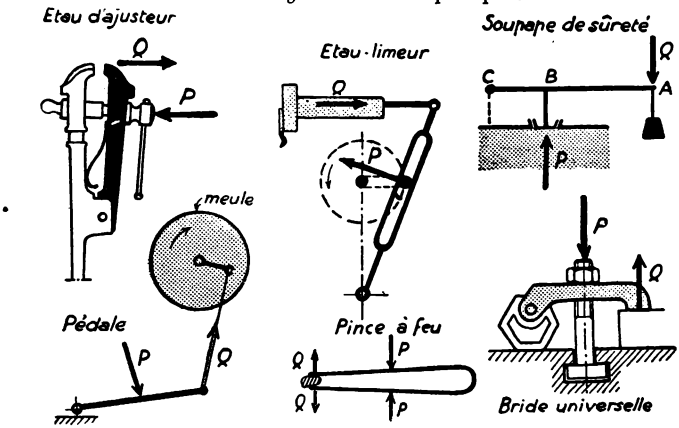


Fig. 5. — Vous reconnaîtrez ici quelques pièces de machines qui sont des leviers de *troisième genre.*

point d'appui entre la force motrice et la résistance. Il est dit inter-appui ou du 1er genre.

Le *fléau d'une balance*, l'*arrache-clou*, le *balancier* d'une pompe à eau domestique, le *culbuteur d'une soupape* de moteur à explosions, la *pédale de frein*, un *aviron*, la *gouge* sont des leviers du 1er genre (fig. 2).

Les *cisailles* à main, les *tenailles* de différents types, les *pinces à souder*, sont des leviers doubles du même genre (fig. 3).

2. ***Levier inter-résistant ou du 2e genre.*** Lorsque la résistance est entre le point d'appui et la force motrice, le levier est dit inter-résistant ou du 2e genre.

La *cisaille à lames*, la *barre de commande d'un frein de treuil*, la *brouette*, le *couperet* du boulanger, sont des leviers inter-résistants (fig. 4).

Le *casse-noix* est un levier double du même genre.

3. ***Levier inter-moteur ou du 3e genre.*** Dans un tel levier la force motrice est appliquée entre le point d'appui et la résistance.

La *pédale de commande d'une meule* ou d'une machine à coudre, la *bride universelle*, le *levier d'une soupape de sûreté*, la *coulisse d'étau limeur*, appartiennent à ce type (fig. 5).

L'*étau d'ajusteur*, les *pincettes*, sont des leviers doubles inter-puissants.

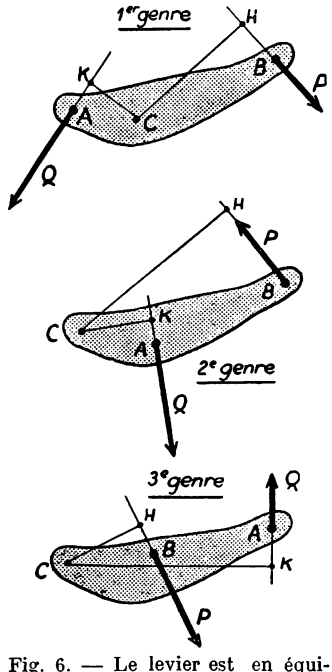


Fig. 6. — Le levier est en équilibre lorsque :

$$CH \times P = CK \times Q$$

REMARQUE. — Les exemples précédents montrent :

1° que les leviers servent, en général, à *déplacer* un corps solide. Au lieu de faire agir directement la force motrice sur le solide à déplacer, on la fait intervenir par l'intermédiaire d'un levier;

2° que beaucoup de leviers sont des pièces ou organes de machines.

3. Équilibre du levier.

Représentons (fig. 6) les trois types de leviers précédemment décrits. Dans ce qui suit nous supposerons :

1° que la forme du levier est quelconque et que son poids est négligeable;

2° que les forces P et Q sont dans un même plan qui contient le point d'appui ou d'articulation C.

Le levier est en équilibre si la somme algébrique des moments des forces P et Q par rapport au point C est nulle.

$$\mathcal{M}_{(C)}P + \mathcal{M}_{(C)}Q = 0$$

Or, quel que soit le type de levier considéré, nous voyons que cette condition conduit à l'égalité :

$$CH \times P = CK \times Q$$

D'où l'on tire : $$P = Q \times \frac{CK}{CH}.$$

Cette relation montre que pour vaincre une résistance Q donnée, l'effort P à exercer sur le levier est :

1° directement proportionnel au bras de levier CK de la résistance.

2° inversement proportionnel au bras de levier CH de la force motrice.

Conséquence : Pour diminuer la force motrice P il faut diminuer CK et augmenter CH.

Par exemple, dans le levier de la figure 1, le point C est très rapproché de la résistance, le rapport $\frac{CK}{CH} = \frac{1}{15}$. Il en résulte que pour vaincre une résistance de 200 kgp il suffira d'un effort :

$$P = 200 \times \frac{1}{15} = 13{,}3 \text{ kgp}$$

Remarque. — La relation (1) peut s'écrire $\frac{P}{Q} = \frac{CK}{CH}$. Elle montre que la force motrice et la résistance sont inversement proportionnelles à leurs bras de levier.

4. Réaction de l'appui.

Réduisons au point d'appui C les forces P et Q *que nous supposerons parallèles pour simplifier.*

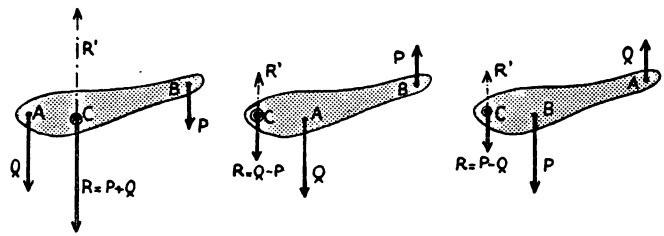


Fig. 7. — La réaction R' du point d'appui est toujours égale et opposée à la résultante R de la *force motrice* et de la *résistance* supposées *réduites* au point d'appui.

Nous obtenons un couple résultant de moment nul et une résultante R (fig 7).

Pour un levier du 1er genre R = P + Q.

Pour un levier du 2e ou du 3e genre, la résultante R est égale à la valeur absolue de la différence (P — Q).

Cette résultante R est équilibrée par la réaction R′ du point fixe sur le levier. Nous pouvons dire que les forces P,Q,R′, forment un système en équilibre.

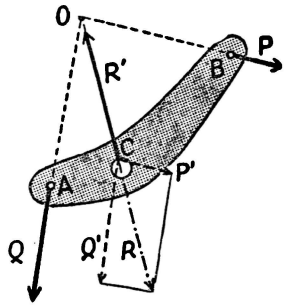


Fig. 8. — Les forces P et Q se réduisent en C à une force unique R équilibrée par la réaction R′ du point d'appui.

Remarque. — Dans le cas où les forces P et Q sont quelconques la réaction R′ est encore égale et opposée à la résultante R obtenue comme l'indique la figure 8.

5. Application numérique.

Considérons le levier de la figure 9. Nous nous proposons de calculer :

1° la force Q qui s'exerce en A ;
2° la force P à appliquer en B ;
3° la réaction de l'appui C.

Calcul de la force Q.

Supprimons le levier par la pensée. Pour maintenir le corps à soulever en équilibre il faudrait exercer en A un certain effort vertical Q′ tel que :

$$\mathfrak{M}_{(M)}\ Q' + \mathfrak{M}_{(M)}\ P' = 0$$

D'où $50 \times Q' - 20 \times 100 = 0$;

soit $Q' = \dfrac{20 \times 100}{50} = \mathbf{40\ kgp}$

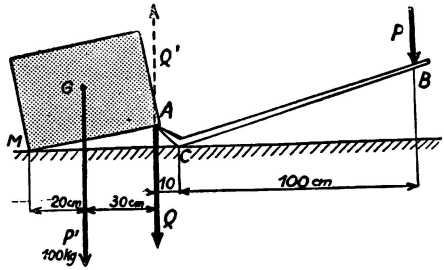


Fig. 9.

La résistance Q est égale et directement opposée à Q′ : son intensité est donc de 40 *kgp*.

Calcul de la force P.

De la relation $100 \times P = 10 \times Q$ nous tirons :

$$P = \frac{10 \times Q}{100} = \frac{10 \times 40}{100} = \mathbf{4\ kgp}$$

Calcul de la réaction de l'appui.

Les forces P et Q transportées parallèlement à elles-mêmes au point C ont une résultante (non figurée) :

$$R = P + Q = 40 + 4 = 44 \text{ kgp.}$$

La réaction R′ (non figurée) est égale et opposée à R. Elle vaut donc ***44 kgp***.

Remarque. — La résultante R appuie le levier sur le sol. Celui-ci doit être assez résistant pour ne pas céder. Très souvent on intercale une planche ou un madrier pour répartir la poussée sur une plus grande surface.

6. Comparaison des différents types de leviers.

Rappelons la relation fondamentale $CH \times P = CK \times Q$ d'où l'on tire : $P = Q \times \dfrac{CK}{CH}$ (fig. 6).

En général, dans un *levier inter-appui*, le rapport $\frac{CK}{CH}$ est toujours inférieure à 1. *La force motrice est donc inférieure à la résistance.* Il en est de même pour le levier *inter-résistant.*

Au contraire, dans le *levier inter-moteur,* le rapport $\frac{CK}{CH}$ est nécessairement supérieur à 1 : *la force motrice est donc toujours supérieure à la résistance.*

7. Combinaison de leviers : chèvre des charrons.

La *chèvre des charrons* se compose d'un système de deux leviers CA et AB ayant une articulation commune A (fig. 10).

Le levier CA prend appui sur le sol. Il porte des crans qui peuvent s'engager sous l'essieu d'une voiture. Pour soulever le poids P' de cet essieu on exerce en B une certaine force motrice P.

Étudions séparément l'équilibre de chaque levier.

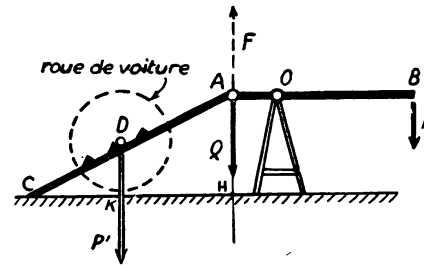


Fig. 10. — *Chèvre des charrons.*

1° *Équilibre du levier CA.* Il est obtenu en exerçant au point A une force verticale F, dirigée vers le haut, telle que :

$$F = P' \times \frac{CK}{CH} = P' \times \frac{CD}{CA}.$$

L'ouvrier qui exercerait cet effort recevrait de la part du levier une réaction Q égale et directement opposée. La force Q représente l'action exercée au point A par le levier CA sur le levier AB.

2° *Équilibre du levier AB.* Ce levier est en équilibre sous l'action des forces P et Q. Nous pouvons écrire :

$$P = Q \times \frac{OA}{OB}.$$

En définitive : $$P = P' \times \frac{CD}{CA} \times \frac{OA}{OB}.$$

EXEMPLE NUMÉRIQUE : $P' = 300\ kgp$; $\frac{CD}{CA} = \frac{1}{3}$; $\frac{OA}{OB} = \frac{1}{5}$. *Calculer la force P.*

$$P = 300 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{5} = \mathbf{20\ kgp}$$

Résumé.

1. Un levier est un solide, mobile autour d'un ***point d'appui***, et sur lequel sont appliquées deux forces : la ***force motrice*** P et la ***résistance*** Q.

2. Le levier peut être ***inter-appui***, ***inter-résistant*** ou ***inter-moteur***.

3. Le levier est en équilibre lorsque la somme algébrique des moments des forces P et Q, par rapport au point d'appui, est nulle.

4. La réaction de l'appui est égale et directement opposée à la résultante des forces P et Q supposées ***réduites*** en ce point.

Exercices.

1. On veut soulever une barre de fer profilé pesant 40 *kilogrammes*. Quelle force F faut-il exercer au point A? (fig. 11).

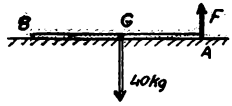


Fig. 11.

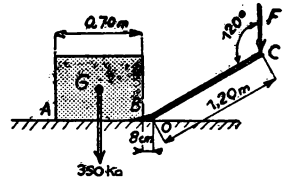


Fig. 12.

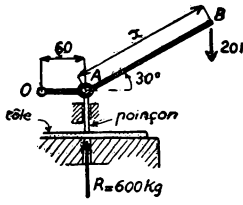


Fig. 13.

2. On soulève un bloc de grès pesant 350 *kgp* à l'aide d'un levier (fig. 12).

a) Avec quelle force appuie-t-il en B sur le bout du levier à l'instant où il se soulève?

b) Quel effort vertical faut-il exercer au point C du levier?

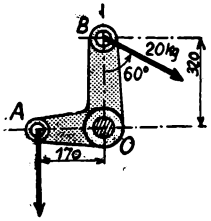


Fig. 14.

3. La figure 13 représente le schéma d'une poinçonneuse à levier.

Une résistance maximum R = 600 *kgp* s'applique au poinçon. On exerce au point B une force de 20 *kgp*.

a) Quelle doit être la longueur de la partie AB du levier?

b) A quel effort est soumis l'axe O d'articulation?

4. On considère un levier coudé à angle droit (fig. 14).

a) Calculer l'effort transmis par le bras OA lorsqu'une force de 20 *kgp* agit sur OB comme l'indique la figure.

b) Calculer la réaction de l'axe d'articulation et vérifier graphiquement le résultat obtenu.

Même question lorsque les bras font entre eux un angle de 120°.

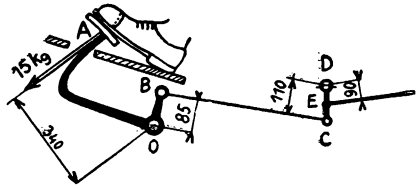


Fig. 15.

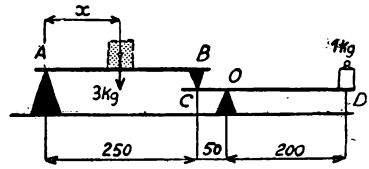


Fig. 16.

5. La figure 15 représente une vue partielle d'une timonerie de frein d'automobile.
a) Reconnaître le type de chaque levier.
b) Calculer les efforts qui s'exercent aux points B, C, E

6. Dans la brouette de la figure 4 : $a = 0{,}50\ m$; $= 1{,}50\ m$; P = 100 *kgp*. Calculer F.

7. Faire le schéma coté d'un frein de bicyclette a tiges rigides ou à câble. Reconnaître les différents types de levier.
Calculer la force pressante du patin sur la jante pour un effort de serrage de la poignée de 5 *kgp*.

8. Dans le dispositif de la figure 16 où faut-il placer sur AB un poids de 3 *kilogrammes* pour maintenir l'équilibre? Modifier la figure s'il y a lieu.
Calculer les efforts supportés par les appuis.

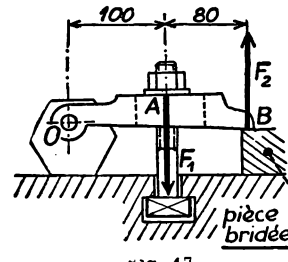


Fig. 17.

9. Sur le dessin de la bride universelle (fig. 17), la force F_1 représente l'action exercée par l'écrou du boulon de serrage sur la bride; la force F_2 l'action exercée par la pièce sur cette bride.
On donne : $F_1 = 600\ kgp$. Calculer :
1° L'intensité de la force F_2;
2° L'intensité de l'action exercée sur la bride par l'axe d'articulation O.

Balances et bascules.

I. BALANCE DE PRÉCISION

1. Description d'une balance de précision.

Elle se compose essentiellement d'un *fléau* supportant *deux plateaux.*

1° Le ***fléau*** est une pièce métallique, rigide pour ne pas se déformer sous l'action des charges qu'il doit porter. Il est *très mobile,* parce qu'il repose sur un plan d'acier horizontal par une *arête fine :* l'arête du *couteau central,* elle-même en acier dur trempé (fig. 1).

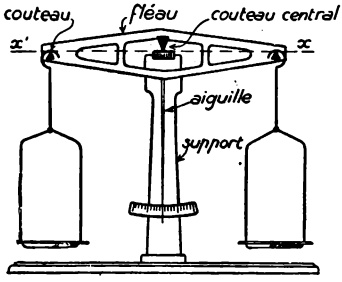


Fig. 1. — Décrivez cette balance de précision.

Il porte deux autres couteaux : un près de chacune de ses extrémités. Leurs arêtes sont tournées vers le haut. Le constructeur les ajuste avec soin pour qu'elles soient *parallèles à celle du couteau central,* que ces trois arêtes soient dans un *même plan,* celle du milieu à *égale distance* des deux autres.

2° Chacun des ***plateaux*** est suspendu à l'arête d'un couteau extrême par l'intermédiaire d'un crochet ou de tout autre système qui le rende d'une mobilité autour de cette arête aussi parfaite que possible. Dans ces conditions, le centre de gravité, soit du plateau vide, soit du plateau chargé, se place toujours dans le plan vertical qui contient l'arête.

3° Une longue ***aiguille,*** fixée au fléau, se déplace devant un arc gradué quand le fléau oscille.

Lorsque les plateaux sont vides, le plan qui contient les arêtes des couteaux est horizontal, et l'*aiguille en face du zéro de la graduation :* c'est la position d'*équilibre à vide.*

4° Toute balance est accompagnée d'une ***boîte de poids.***

2. La première qualité d'une balance est la fidélité[1].

Expérience. — Pesons, plusieurs fois de suite, un même corps *mis toujours dans le même plateau;* nous aurons soin, d'une pesée à l'autre,

1. La fidélité n'est pas une qualité spéciale à la balance, TOUT INSTRUMENT DE MESURE DOIT ÊTRE FIDÈLE, c'est-à-dire fournir le même résultat quand on refait plusieurs fois la même mesure.
Exiger cette qualité paraît tellement naturel qu'on ne lui attache pas toujours l'importance qu'elle mérite.

de changer la position du corps sur son plateau, celle des poids sur l'autre.

Si nous trouvons toujours le même poids, la balance est ***fidèle.***

Si nous trouvons des poids différents, elle n'est pas fidèle. *Toute balance qui n'est pas fidèle est inutilisable,* bonne pour la ferraille.

A quelles conditions une balance est-elle fidèle? Il faut que le *point de suspension d'un plateau soit toujours à la même distance de l'arête du couteau central,* ce qui exige :

1° que la flexion du fléau sous l'action des plateaux chargés soit pratiquement nulle : condition de *rigidité du fléau.*

2° que les arêtes des couteaux soient *fines* et *parallèles.*

Nous désignerons dans la suite les distances des arêtes des couteaux extrêmes au couteau central sous le nom de *bras du fléau.*

3. La qualité qui vient en second lieu est la sensibilité[1].

Une balance est sensible au gramme, au milligramme quand l'équilibre étant établi, une surcharge de 1 gramme ou de 1 milligramme, mise dans l'un des plateaux, déplace l'aiguille d'une quantité appréciable.

Il est clair qu'avec une balance sensible au gramme on ne peut peser qu'à 1 gramme près. *Plus une balance est sensible, plus précises peuvent être les pesées :* à condition, bien entendu, que la balance soit fidèle. Il serait inutile de faire une pesée au milligramme si deux pesées successives du même corps différaient entre elles de plusieurs milligrammes. *La sensibilité n'est utilisable que dans le domaine de la fidélité.*

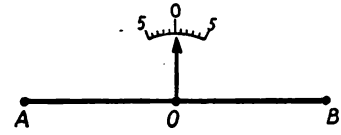


Fig. 2. — Représentation schématique d'une balance.

REMARQUE. — On *mesure la sensibilité par la valeur de la surcharge qui fait déplacer l'aiguille de* 1 *division.*

La balance étant en équilibre, ajoutons une surcharge de 1 centigramme. Si l'aiguille se déplace de 5 divisions, notre balance est sensible à 10 : 5 = 2 milligrammes.

4. Justesse d'une balance : définition et vérification.

a) DÉFINITION. — *Une balance est juste si elle prend la même position d'équilibre qu'à vide quand on met des poids égaux dans les plateaux.*

b) *Vérification de la justesse.* — On ne peut utiliser deux poids égaux pris dans une boîte par exemple, car *on n'est pas sûr* qu'ils sont réellement égaux.

1. C'est encore là une qualité qu'on recherche pour tout instrument de mesure. D'une façon générale, *un appareil est d'autant plus sensible qu'il permet de percevoir des variations plus faibles de la grandeur à mesurer.*

EXPÉRIENCE. — Mettons un corps quelconque dans un plateau : équilibrons-le à l'aide de poids marqués ou de tout autre corps mis dans l'autre plateau.

Intervertissons les charges : si l'équilibre persiste la *balance est juste*. Nous allons le démontrer.

5. Théorie de la justesse.

Le fléau est un corps solide mobile autour de l'axe horizontal O. Il est en équilibre lorsque *la somme algébrique des moments, par rapport à l'axe, des forces qui lui sont appliquées, est nulle.*

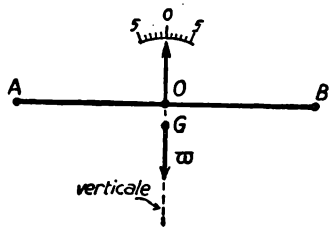


Fig. 3. — *Équilibre du fléau seul* ; ϖ est le poids du fléau appliqué au centre de gravité. GO = d.

1° ***Équilibre du fléau seul : aiguille au zéro.***

Force appliquée au fléau : son poids seul ϖ[1], au centre de gravité G (fig. 3).

Condition d'équilibre : $\mathcal{M}_{(O)}\ \varpi = 0$, ce qui exige que la ligne d'action du poids ϖ, c'est-à-dire la verticale du centre de gravité, rencontre l'axe de rotation O.

Pour la *stabilité de l'équilibre*, G doit être au-dessous de O.

2° ***Équilibre du fléau portant les plateaux vides : aiguille au zéro.***

Forces appliquées au fléau (fig. 4) : son poids ϖ, au centre de gravité G; p_1, poids du plateau de gauche, appliqué sur l'arête A; p_2, poids du plateau de droite, appliqué sur l'arête B.

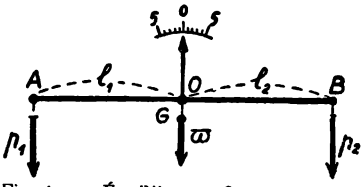


Fig. 4. — *Équilibre du fléau portant les plateaux vides*, p_1 et p_2 sont les poids des plateaux, appliqués sur les arêtes des couteaux extrêmes.

Conditions d'équilibre :

$$\mathcal{M}_{(O)}\ \varpi + \mathcal{M}_{O)}\ p_1, + \mathcal{M}_{O}\ p_2 = 0.$$

$\mathcal{M}_{(O)}\ \varpi$ est nul, puisque l'aiguille est au zéro comme dans le premier cas, donc que la ligne d'action de ϖ rencontre l'arête O.

Pour calculer les autres moments, nous conviendrons de considérer comme *positifs* ceux qui tendent à faire tourner le fléau dans le sens direct (sens inverse des aiguilles d'une montre) :

$$\mathcal{M}_{(O)}\ p_1 = \ell_1\ p_1$$
$$\mathcal{M}_{(O)}\ p_2 = -\ \ell_2\ p_2.$$

La condition d'équilibre est :

$$\ell_1\ p_1 - \ell_2\ p_2 = 0 \quad \text{ou} \quad \ell_1\ p_1 = \ell_2\ p_2 \qquad (1)$$

1. ϖ : lettre *pi* minuscule.

3° ***Equilibre du fléau portant les plateaux chargés : aiguille au zéro.*** — La seule différence avec le cas précédent est que les forces appliquées sur les arêtes des couteaux sont, avec les poids des plateaux vides, les poids P_1 et P_2 des charges qu'ils portent (fig. 5).

Même raisonnement. La condition d'équilibre est

$$l_1 (P_1 + p_1) = l_2 (P_2 + p_2) \qquad (2)$$

d'où, en tenant compte de (1) :

$$l_1 P_1 = l_2 P_2. \qquad (3)$$

4° ***Condition de justesse.*** — Pour que la balance soit juste, c'est-à-dire pour que $P_1 = P_2$, il faut évidemment

$$l_1 = l_2$$

Pour qu'une balance soit juste, il faut que les bras du fléau soient égaux.

5° ***Vérification de la justesse.*** — Le calcul montre que si une balance, ayant des bras d'environ 20 centimètres, peut peser 100 grammes avec une sensibilité de 1 mmg — ce qui est courant — la différence de longueur de ces bras est inférieure à 2 microns (voir exercices).

Ce n'est donc pas par des mesures de longueur qu'on peut vérifier la justesse d'une balance. C'est par des pesées qu'on opère, ainsi qu'il a été dit.

Supposons l'équilibre réalisé (aiguille au zéro) avec des charges P_1 à gauche, P_2 à droite. C'est que, en vertu de (3) :

$$l_1 P_1 = l_2 P_2 \qquad (3)$$

Si l'équilibre persiste quand on intervertit les charges, P_1 à droite, P_2 à gauche, c'est que :

$$l_2 P_1 = l_1 P_2 \qquad (4)$$

ou, en multipliant membre à membre (3) et (4) et simplifiant,

$$P_1 = P_2.$$

La balance est donc juste.

REMARQUE. — On devine, étant donnée la précision avec laquelle il faudrait réaliser l'égalité des bras, que les balances de précision ne sont jamais justes, ou plutôt qu'elles sont moins justes que sensibles. Par exemple, si nous pesons un corps sur une balance de précision *sensible au 1/10 de milligramme*, nous trouverons un poids différant du poids exact de quelques milligrammes.

C'est pour cette raison qu'il est nécessaire de procéder par ***double pesée*** pour les pesées de grande précision (voir cours de physique 1re Année).

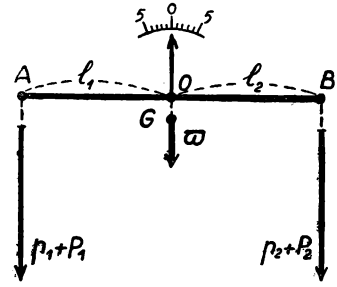


Fig. 5. — *Équilibre de la balance chargée.* P_1 est le poids de la charge; P_2 la somme des poids marqués.

6. Théorie de la sensibilité.

Notre balance est en équilibre (ai-

guille au zéro) avec des charges P_1 à gauche, P_2 à droite (fig. 5)

$$l_1(P_1 + p_1) = l_2 (P_2 + p_2) \qquad (2)$$

Ajoutons une surcharge p sur l'un des plateaux celui de gauche par exemple. *Le fléau prend une nouvelle position d'équilibre* (fig. 6); l'aiguille indique n divisions (à gauche).

La surcharge qui déplacerait l'aiguille de 1 division est égale à p/n : *plus elle est petite, plus la sensibilité est grande.*

Calculons cette surcharge. Nous allons écrire la condition du nouvel équilibre, en tenant compte cette fois du poids du fléau : car l'aiguille n'étant plus au zéro, la verticale du centre de gravité ne rencontre plus l'axe de rotation (arête du couteau central).

$$OA'(P_1 + p_1 + p) — OB'(P_2 + p_2) — OD \times \varpi = 0$$

$$l_1 \cos \alpha (P_1 + p_1 + p) — l_2 \cos \alpha (P_2 + p_2) — d \sin \alpha \times \varpi = 0.$$

Mais d'après (3) :

$$l_1 \cos \alpha (P_1 + p_1) = l_2 \cos \alpha (P_2 + p_2)$$

donc :

$$l_1 \cos \alpha \times p — d \sin \alpha \times \varpi = 0$$

ou

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{p.l_1}{\varpi d}$$

D'autre part, l'aiguille de longueur L (longueur comptée depuis l'axe de rotation O jusqu'à la pointe), a dévié n divisions; u étant la distance de deux divisions de la graduation, la pointe a décrit un arc de longueur $n.u$; on a donc :

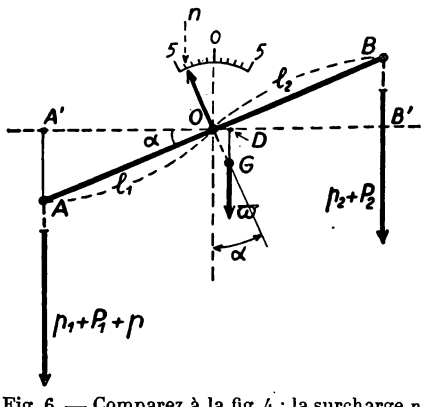


Fig. 6. — Comparez à la fig. 4 : la surcharge p a modifié la position d'équilibre de n divisions.

$$\alpha = \frac{nu}{L}$$

α est petit. Donc :

$$\operatorname{tg} \alpha = \alpha$$

$$\frac{p.l_1}{\varpi d} = \frac{n.u}{L}$$

$$\frac{p}{n} = \frac{1}{L} u \times d \times \frac{\varpi}{l_1}$$

Pour avoir une grande sensibilité, il faut que $\frac{p}{n}$ soit petit :

1° — ***L** doit être grand.* On ne peut dépasser la hauteur du support.

2° — ***u*** distance de deux divisions de la graduation, doit être petit. Les balances de haute précision portent une division au dixième de millimètre que l'on observe avec un microscope de faible grossissement.

3° — ***d** doit être petit.* Mais plus il est petit, plus la balance oscille lentement, plus les pesées sont longues.

On règle la distance d à l'aide d'un *écrou* que l'on peut faire monter ou descendre sur sa tige filetée portée par le fléau de façon que la durée d'une oscillation ne dépasse pas quelques secondes.

4° — $\frac{\varpi}{l_1}$ *doit être petit,* ce qui exige que *le fléau soit court.* En effet, si on remplace un fléau par un autre *géométriquement semblable,* mais 2 fois plus long, son volume sera 8 fois plus grand : ϖ sera multiplié par 8, l_1 ne sera multiplié que par 2, au total ϖl_1 sera 4 fois plus grand : donc la sensibilité sera 4 fois plus petite.

On ne donne au fléau que *la longueur* nécessaire pour loger les plateaux. Et on s'efforce, en outre, à le rendre aussi léger que possible, sans que cependant il fléchisse sous les charges des plateaux : d'où sa forme évidée avec des entretoises (fig. 1).

REMARQUE 1. — La sensibilité est indépendante des charges P_1 et P_2 des plateaux lorsque les trois arêtes des couteaux sont dans le même plan comme nous l'avons supposé.

REMARQUE 2. — Nous renvoyons au cours de physique pour les détails relatifs à la construction, au réglage, à l'entretien de la balance et à la conduite des pesées.

II. BALANCES DU COMMERCE

7. Balance de Roberval.

Elle comprend essentiellement un parallélogramme ABCD dont les sommets sont articulés. Le *fléau AB* et le *contre-fléau* CD sont mobiles autour des couteaux O et O' (fig. 7).

Les côtés AC et BD qui portent les plateaux demeurent verticaux quand la balance oscille.

Quel que soit l'emplacement de la charge sur les plateaux, tout se passe comme si elle agissait directement sur les points A et B du fléau.

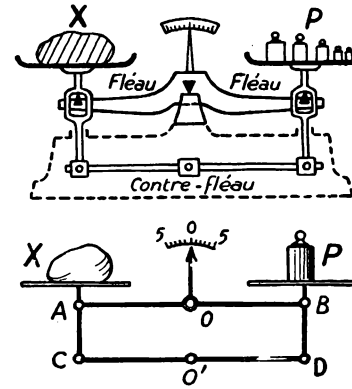


Fig. 7. — Décrivez cette *balance de Roberval.* Voyez comment on la représente schématiquement.

8. Balance automatique : balance des bouchers, des épiciers.

En voici le principe. A une balance de Roberval (fig. 8) est adjoint le mécanisme suivant : un *ruban d'acier,* dont une extrémité est fixée au fléau, s'enroule sur une pièce métallique appelée *came,* mobile autour d'un *axe.* Cette came porte un *contrepoids* et une *longue aiguille.*

On place toujours le corps à peser sur le plateau de droite. — Le fléau

s'incline, entraîne le ruban qui fait tourner la came : l'aiguille se déplace devant un arc gradué et indique le poids du corps.

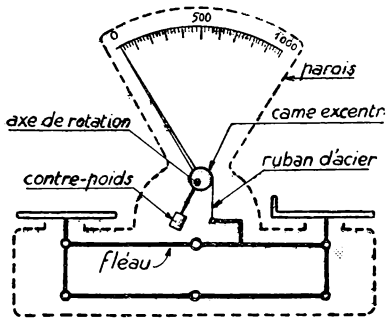


Fig. 8. — Schéma d'une *balance automatique.*

Si le corps pèse plus de 1 kilogramme (1 250 g par ex.) on met 1 kilogramme sur le plateau de gauche et l'aiguille marque 250 grammes.

9. Balance romaine.

C' est un bras de levier inter-appui à bras inégaux (fig. 9).

Sur le bras le plus long, qui est gradué, glisse un poids curseur *p*.

Sur le bras le plus court on accroche le corps à peser.

Au point O, un couteau solidaire du levier est mobile dans un étrier soutenu par un anneau qu'on tient à la main.

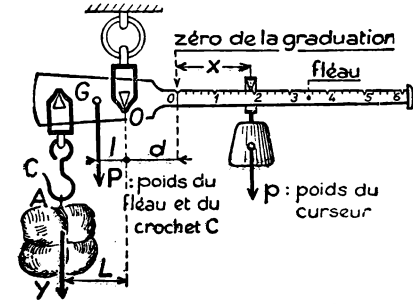


Fig. 9. — *Balance romaine.*

Pour réaliser l'équilibre on fait glisser le curseur de manière à rendre le levier horizontal. On lit directement le poids *y* du corps en face de la division où s'arrête le curseur.

ETALONNAGE DE L'APPAREIL. — 1° *A vide*, le poids P du levier appliqué en G tend à faire basculer le levier autour de O. On amène le curseur à la position qui rétablit l'équilibre et l'on inscrit sur la barre le nombre 0 en face du point d'arrêt de ce curseur.

On a alors : $$l \times P = d \times p \qquad (1)$$

2° *On accroche en A un poids connu de* 5 *kg par exemple.*

Pour maintenir l'équilibre il faut déplacer le curseur vers la droite. Dans cette nouvelle position on inscrit le nombre 5 sur la barre.

Nous allons montrer qu'on peut achever la graduation en divisant l'intervalle 0 — 5 *en* 5 *parties égales et en prolongeant les points de division au delà du* 5.

Soient un poids inconnu *y* et *x* la quantité dont il faut faire glisser le curseur à partir du zéro pour établir l'équilibre.

$$\mathcal{M}_{(O)}\, y + \mathcal{M}_{(O)}\, P + \mathcal{M}_{(O)}\, p = 0$$

soit : $$L \times y + l \times P - (x + d)\, p = 0$$

d'où : $$Ly + lP = xp + dp.$$

Or, d'après (1) $$lP = dp$$

donc : $$Ly = xp \quad \text{et} \quad x = \frac{L}{p}\, y$$

Le rapport $\frac{L}{p}$ étant constant on voit que *le déplacement* x *du curseur est propor-*

tionnel au poids y à mesurer. On peut donc bien procéder comme il a été dit pour réaliser la graduation.

REMARQUE. — Cette balance n'est pas précise, car les couteaux sont grossiers, cependant son emploi est justifié par la facilité de son transport.

III. BASCULES

10. Balance de Quintenz ou bascule au dixième.

Cette bascule est une combinaison de leviers. Elle permet d'évaluer le poids d'un corps à l'aide de poids marqués dont la somme représente en général le dixième du poids total. Elle comprend (fig. 10) :

1° un tablier s'appuyant d'une part en A sur un levier OB; d'autre part sur la barre CD grâce à la tige IH articulée en I et H;

2° un levier CD solidaire du levier OB par la tige CB.

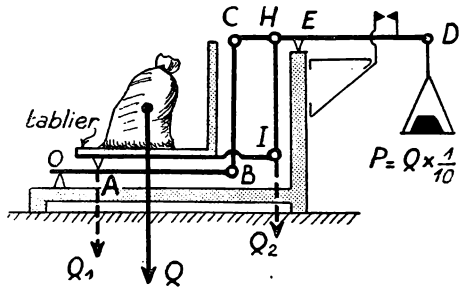


Fig. 10. — *Bascule au dixième.*

Pour mesurer le poids Q d'un corps on le place sur le tablier et alors les barres BC et IH s'abaissent, entraînant le levier CD qui pivote autour du couteau E. Pour rétablir l'équilibre, il faut mettre dans le plateau accroché en D un certain poids P.

Or, par construction, on a :

$$\frac{OA}{OB} = \frac{1}{5} \quad ; \quad \frac{EH}{EC} = \frac{1}{5} \quad ; \quad \frac{EH}{ED} = \frac{1}{10}.$$

Nous allons montrer que *le poids P à mettre dans le plateau est le dixième de la charge Q, quel que soit l'emplacement de celle-ci sur le tablier*[1].

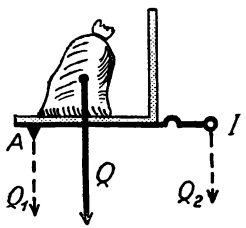


Fig. 11. — Le poids à peser se répartit sur les appuis A et I.

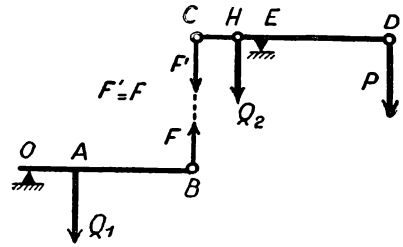


Fig. 12.

1. Condition de fidélité.

1° *Isolons le tablier.* La charge Q (fig. 11) est équivalente à deux charges : Q_1 appliquée en A; Q_2 appliquée en I et qui se transmet en H sur le levier CD.

2° *Considérons le système de leviers OB, CD en équilibre* (fig. 12).

Pour maintenir OB horizontal, il faut exercer en B une force F telle que :

$$\frac{F}{Q_1} = \frac{OA}{OB} \qquad \text{soit : } F = \frac{Q_1}{5}.$$

Le levier OB exerce sur le point C une réaction F', égale et directement opposée à F.

Le levier CD est donc en équilibre sous l'action des forces F', Q_2 et P et l'on peut écrire :

$$\mathcal{M}_{(E)}\, F' + \mathcal{M}_{(E)}\, Q_2 + \mathcal{M}_{(E)}\, P = 0$$

ou :

$$CE \times F' + EH \times Q_2 - ED \times P = 0.$$

Or :

$$\frac{EH}{EC} = \frac{1}{5} \qquad \text{d'où } CE = 5 \times EH.$$

Il en résulte que $CE \times F' = 5 \times EH \times \frac{Q_1}{5} = EH \times Q_1$.

La somme algébrique des moments s'écrit donc :

$$EH \times Q_1 + EH \times Q_2 - ED \times P = 0.$$

On en tire :

$$ED \times P = EH\,(Q_1 + Q_2) = EH \times Q$$

et enfin

$$P = Q \times \frac{EH}{ED} = \frac{Q}{10}.$$

11. Bascule à curseur.

C'est une variante de la précédente. Le plateau portant les poids est remplacé par un poids curseur qui coulisse sur le fléau d'une romaine disposé parallèlement à la largeur du tablier.

Quand l'équilibre est réalisé, un index porté sur le curseur permet de lire sur le fléau le poids de la charge du tablier.

Résumé

1. Une *balance de précision* se compose d'un levier ou fléau, aux extrémités duquel sont suspendus deux plateaux.
Elle doit être fidèle — sensible — juste. — Son équilibre doit être stable.
Ces diverses conditions nécessitent :
— des arêtes de couteaux fines parallèles et placées dans le même plan horizontal;
— des bras de fléaux égaux et rigides;
— des plateaux très mobiles;
— que le centre de gravité du fléau seul soit placé sous l'axe de suspension, au voisinage de cet axe.
Pour les pesées de grande précision, on procède toujours par la méthode de la double pesée.

2. La *balance de Roberval* est à double fléau, ce qui permet de placer les plateaux au-dessus des fléaux.

3. La *balance automatique* est une balance de Roberval complétée par un peson à sensibilité constante.

4. La ***balance romaine***, peu précise, est un simple levier inter-appui à curseur mobile.

5. La ***bascule de Quintenz*** utilise une combinaison de leviers. Les poids marqués placés dans l'unique plateau représentant le dixième du poids de la charge placée sur le tablier.

6. La ***bascule à curseur*** est une bascule de Quintenz à laquelle est adjointe une romaine.

Exercices.

1. Le résultat pratique de cette leçon doit être que les élèves connaissent bien la *description* et le *fonctionnement* des balances usuelles, notamment de la *balance de Roberval* et de la *bascule à curseur.*

Ils devront les manipuler pour étudier, sur l'une au moins, la fidélité, la sensibilité, la justesse.

2. Une balance est en équilibre lorsque les poids placés dans les plateaux sont respectivement 200 et 200,10 *grammes.*

a) Quel est le rapport des bras du fléau?

b) Calculer la longueur de chacun d'eux, sachant que la distance des couteaux extrêmes est de 300 *millimètres.*

3. Pour mesurer la résistance à la rupture par traction, d'une éprouvette de béton, on utilise, dans les laboratoires, la *balance de Michaëlis* (fig. 13).

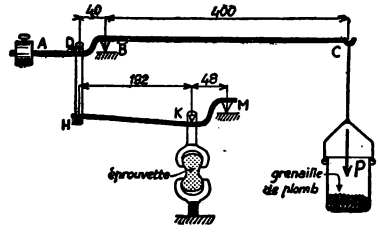


Fig. 13. — *Balance de Michaëlis.*

1° Décrire l'appareil.

2° Au moment où une certaine éprouvette se rompt, le poids P du seau et de la grenaille de plomb est 2,5 *kgp.* Calculer la résistance à la rupture de cette éprouvette.

3° Calculer les forces qui agissent en D et H au même moment, ainsi que les réactions correspondantes aux points B et M.

Machines simples : Poulies, Palans, Treuils, Grues.

I. POULIE FIXE ET POULIE MOBILE

1. Poulie fixe.

Pour monter un sac de ciment sur son échafaudage le maçon utilise une *poulie*. C'est une roue à gorge dont l'axe repose sur une chape munie d'un crochet (fig. 1).

Une corde ou une chaîne passe dans la gorge : à l'une des extrémités on place la charge Q (*résistance*) et à l'autre on exerce une traction F (*force motrice*). La poulie tourne lorsque le fardeau monte.

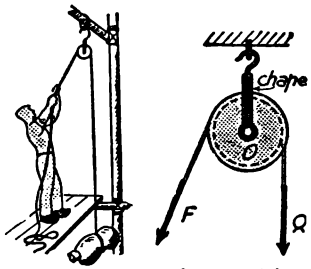


Fig. 1. — F est la force motrice; le poids Q de la charge est la résistance

2. Équilibre de la poulie fixe.

EXPÉRIENCE. — La figure 2 représente une poulie montée sur un roulement à billes afin de réduire le frottement sur l'axe.

Au point A du cordonnet, accrochons un poids de 100 *grammes*. Nous constatons que la poulie demeure en équilibre si l'on accroche en B un autre poids de 100 *grammes*. Les poids qui se font équilibre de part et d'autre de la poulie sont donc égaux.

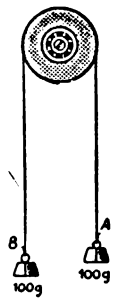


Fig. 2. — La poulie est en équilibre lorsque la force motrice est égale à la résistance.

THÉORIE DE L'ÉQUILIBRE. — La poulie est un corps solide, mobile autour de l'axe O (fig. 3). Nous supposerons que :

1° le frottement du moyeu de la poulie sur son axe est négligeable;
2° l'axe est réduit au point O;
3° la partie AB du câble *fait corps* avec la poulie;
4° les points A, B, O, sont dans le plan moyen de la poulie et que les forces F et Q agissent dans ce plan.

La condition d'équilibre s'écrit alors

$$\mathcal{M}_{(O)}\ F + \mathcal{M}_{(O}\ Q = 0$$

Soit r le rayon de la poulie. Nous devons avoir

$$r \times F - r \times Q = 0.$$

D'où $$F = Q.$$

3. Réaction de l'axe de la poulie fixe.

Réduisons au point O les forces P et Q (fig. 3). Nous obtenons
— un couple résultant de moment nul d'après la condition d'équilibre;
— une résultante générale R des forces F et Q.

Si nous négligeons le poids de la poulie, la réaction R' (non représentée) de l'axe est égale et directement opposée à R.

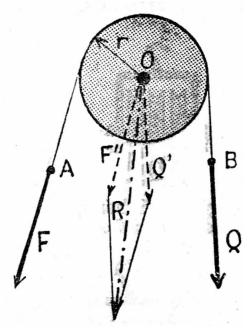


Fig. 3. — Les forces F et Q se réduisent au point O à une résultante unique R. La réaction de l'axe est égale et opposée à R.

4. Poulie mobile.

C'est une poulie dont la chape supporte *directement* la charge Q à soulever (fig. 4). La corde est fixée en un point A, elle s'enroule sur la poulie et l'on tire sur le brin libre. En général, on fait passer celui-ci sur une poulie fixe, car il est moins fatigant d'exercer une traction dirigée de haut en bas qu'une traction dirigée de bas en haut.

5. Équilibre de la poulie mobile.

Négligeons le poids propre de la poulie devant la charge Q à soulever, et supposons en outre que *les brins de la corde sont parallèles*, cas le plus fréquent en pratique.

Substituons à la poulie une barre *fictive ab*, horizontale. La charge Q appliquée en son milieu O (fig. 4) peut être remplacée par deux forces de même sens, parallèles et égales à Q/2, appliquées aux points *a* et *b*.

La force Q/2 appliquée en *a* est équilibrée par la réaction du crochet A. La force Q/2 appliquée en *b* est équilibrée par la force égale F (poulie fixe). On a donc :

$$F = \frac{Q}{2}$$

Nous voyons que *dans une poulie mobile l'effort F qui équilibre la résistance Q est égal à la moitié de celle-ci.*

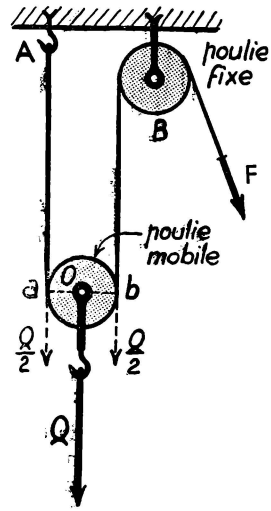


Fig. 4. — Dans une *poulie mobile*, soutenue par des brins parallèles : $F = \frac{Q}{2}$

REMARQUE. — Les brins A*a*, B*b* de la corde enroulée sur la poulie mobile sont également tendus. Il en est de même pour les deux brins de la corde enroulée sur la poulie fixe.

II. PALANS

6. Palan ordinaire.

Un ***moufle*** est constitué par une chape portant un axe sur lequel tournent *librement* plusieurs poulies à gorge (fig. 5).

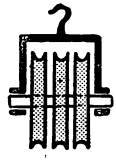


Fig. 5. — Schéma d'un *moufle*.

Si l'on réunit deux moufles par une corde enroulée comme l'indique la figure 6, on obtient un ***palan***.

L'un des moufles est fixe, l'autre est mobile et reçoit la charge Q. Pour lever le fardeau, il suffit de tirer sur le brin libre ou *garant*.

7. Équilibre du palan ordinaire.

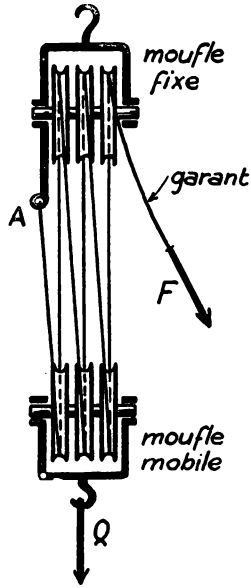


Fig. 6. — Voici un *palan*. Il comprend deux moufles.

Le palan de la figure 7 ne diffère du précédent que par la disposition des poulies. Il est beaucoup plus encombrant et on ne l'emploie guère en pratique.

Nous observons que les brins de la poulie A sont également tendus lorsqu'il y a équilibre. Il en est de même pour les brins de la poulie

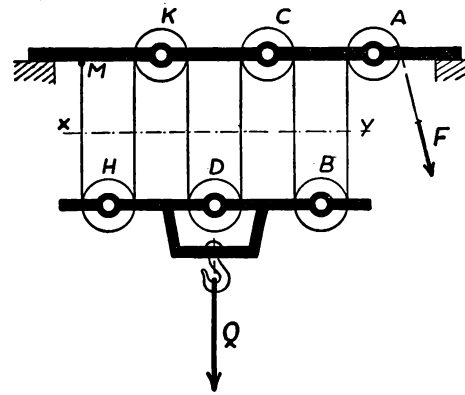


Fig. 7. — L'équilibre est réalisé quand $F = \frac{Q}{n}$ (n : nombre de brins).

B, puis de la poulie C et ainsi de suite. En définitive, tous les brins de la corde sont également tendus et si nous les coupons tous par le plan de trace *xy*, sur le plan de figure, il faudra, pour maintenir la charge Q immobile, appliquer à chaque section une force verticale, dirigée vers le haut, et égale à F.

Dans l'exemple considéré il y a 6 brins, donc $6\,F = Q$ et $F = \frac{Q}{6}$.

Le même raisonnement peut être repris pour le palan de la figure 6. Par suite de la mobilité de chaque poulie autour de son axe, tous les brins de la corde sont également tendus. Si on suppose qu'ils sont parallèles, chacun d'eux supporte donc une fraction $\frac{Q}{n}$ de la charge totale. (*n:* nombre des poulies du palan.)

Donc : *dans un palan comprenant* ***n*** *poulies l'effort F qui équilibre la résistance Q est :*

$$F = \frac{Q}{n}$$

8. Palan différentiel de Weston.

Un tel palan comprend les organes suivants (fig. 8) :

1° Deux roues à gorge A et B de diamètres peu différents, solidaires l'une de l'autre. Elles sont montées sur une chape portant un crochet d'attache. D'autre part, les gorges portent les empreintes des maillons d'une chaîne.

2° Une poulie mobile C portant le crochet destiné à soulever la charge Q.

3° Une chaîne sans fin D qui s'enroule comme l'indique la figure et sur laquelle on tire avec une force F. Les maillons s'engageant dans les empreintes des poulies, il en résulte qu'une partie de la chaîne peut être lâche sans inconvénient.

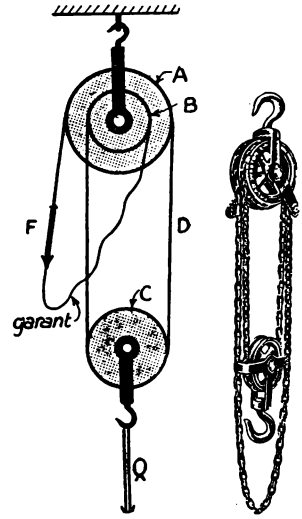


Fig. 8. — *Palan différentiel.*

9. Équilibre du palan différentiel.

Nous supposerons que :

a) Le poids de la poulie mobile et de la chaîne sont négligeables devant la charge Q.

b) Les brins de la chaîne qui supportent directement la charge sont parallèles. Chacun d'eux supporte donc la moitié de la charge, soit Q/2 (fig. 9).

Dans ces conditions, l'ensemble des roues A et B, mobile autour de l'axe O, est en équilibre sous l'action des forces F, F_1, F_2. Donc :

$$\mathcal{M}_{(O)}\ F + \mathcal{M}_{(O)}\ F_1 + \mathcal{M}_{(O)}\ F_2 = 0.$$

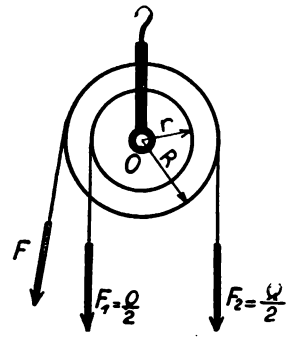


Fig. 9. — Il y a équilibre lorsque : $R \times F = (R - r)\frac{Q}{2}$.

Soit $R \times F + r \times \frac{Q}{2} - R \times \frac{Q}{2} = 0.$

De cette relation nous tirons $R \times F = (R - r)\frac{Q}{2}$ puis

$$F = Q \times \frac{R - r}{2R} = \frac{Q}{2}\left(1 - \frac{r}{R}\right)$$

On voit que l'effort F nécessaire à l'équilibre de la charge est d'autant plus faible que le rapport $\frac{r}{R}$ est plus voisin de 1. Il y a donc intérêt prendre des poulies A et B de diamètres peu différents.

EXEMPLE NUMÉRIQUE. — *Dans un palan de Weston R = 120 mm, r = 110 mm, uel effort faut-il exercer sur le garant pour soulever une charge de 400 kilogrammes*

ous avons $F = 400 \times \frac{R - r}{2R} = 400 \times \frac{120 - 110}{2 \times 120}$

d'où $F = 400 \times \frac{10}{240} \simeq$ ***16,6 kgp***

III. TREUIL

10. Treuil simple.

Un treuil se compose (fig. 10).

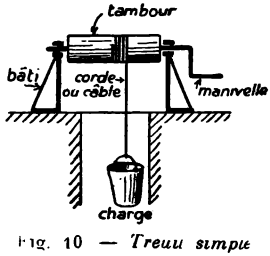


Fig. 10 — *Treuil simple*

1° d'un tambour sur lequel on fixe la corde qui soutient le fardeau;

2° d'un arbre horizontal reposant à ses extrémités sur deux supports;

3° d'une manivelle fixée à l'une des extrémités de l'arbre.

En faisant tourner la manivelle la corde s'enroule sur le tambour et la charge monte.

11. Équilibre du treuil.

Soient : F l'effort qui s'exerce sur la poignée perpendiculairement au bras de manivelle OA ;

Q la charge à soulever (fig. 11).

Lorsque le tambour est en équilibre, la somme algébrique des moments par rapport à l'axe de rotation, des forces appliquées est nulle.

$$\mathfrak{M}_{(0)}F + \mathfrak{M}_{(0)}Q = 0$$

Soit $l \times F - r \times Q = 0.$

D'où nous tirons $F = Q \times \frac{r}{l}$

Nous voyons que pour équilibrer la charge Q il faut développer un effort F d'autant plus petit que :

1° le rayon du tambour est plus faible,

2° le bras de la manivelle est plus grand.

En pratique l'effort F d'un homme atteint 15 *kgp* et le rayon de manivelle ne dépasse guère 0,40 *m.*

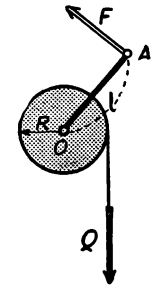


fig.11.—L'équilibre est réalisé lorsque $\mathcal{M}_{(o)}F + \mathcal{M}_{(o)}Q = 0$.

EXEMPLE NUMÉRIQUE. — *Quelle charge peut-on soulever à l'aide d'un treuil dont le rayon du tambour est* r = 80 *mm, sachant que l'effort* F = 12 *kgp est perpendiculaire au rayon de manivelle qui mesure* 0,40 *m.*

Prenons le mètre comme unité de longueur

De la formule $F = Q \times \frac{r}{l}$ nous tirons $Q = \frac{F \times l}{r}$

D'où $Q = \frac{12 \times 0{,}4}{0{,}08} = \mathbf{60\ kgp}$

REMARQUES. — Très souvent le tambour du treuil est commandé par deux manivelles calées à 180° ou par un dispositif d'engrenages ou de roue à vis sans fin.

2. Le *cabestan* (fig. 12), est un treuil à axe vertical.

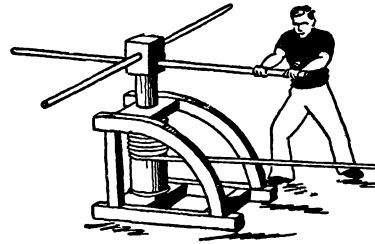


fig. 12. — Le cabestan est un treuil à axe vertical

IV. GRUES

Une grue est un appareil de levage destiné à soulever de lourds fardeaux. Elle résulte de la combinaison des dispositifs précédemment étudiés : poulie fixe et mobile, palan, treuil. Il en existe de nombreux types.

La figure 13 représente le schéma d'une grue dont le pivot est fixe; la fig. 14 celui d'une grue montée sur chariot mobile.

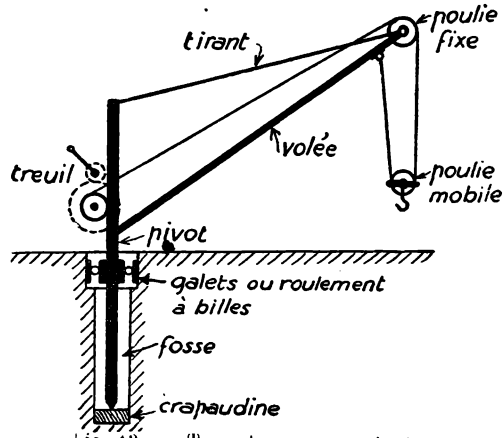


fig. 13 — Type de grue à poste fixe

12. Machines simples

Dans toutes les machines étudiées dans cette leçon et les deux précédentes, nous observons qu'il n'y a que deux forces extérieures mises en jeu dans chacune d'elles : la *résistance* et la *force motrice*

Pour cette raison, elles sont dites ***machines simples***. Nous en étudierons d'autres dans la leçon suivante.

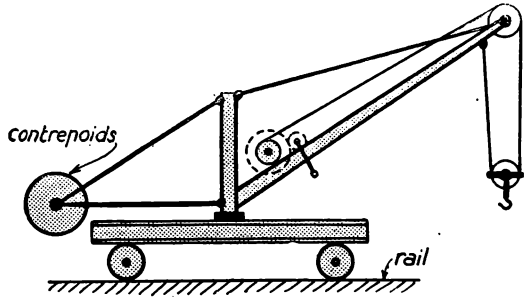


Fig. 14. — Type de grue mobile sur rails.

Résumé.

1. Les poulies, palans, treuils et grues sont des appareils de levage qui permettent de soulever un fardeau en exerçant un effort F beaucoup plus faible en général que le poids de ce fardeau.

2. Soit Q le poids à soulever (ou la résistance à vaincre); l'effort F a pour valeur :

poulie fixe : $F = Q$

poulie mobile : $F = \frac{Q}{2}$

palan ordinaire : $F = \frac{Q}{n}$ (n : nombre total des poulies)

palan différentiel : $F = Q\,\frac{(R - r)}{2R}$ (R et r : rayons des roues)

treuil simple : $F = Q \times \frac{r}{l}$ (r : rayon du tambour, l : rayon de manivelle).

Exercices.

1. On soulève une charge pesant 140 *kilogrammes* à l'aide de la poulie de la figure 15. Calculer la charge que supporte l'axe de cette poulie. Dessiner son support.

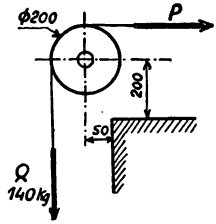


Fig. 15.

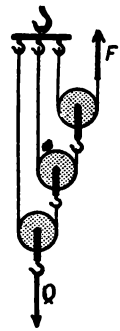


Fig. 16.

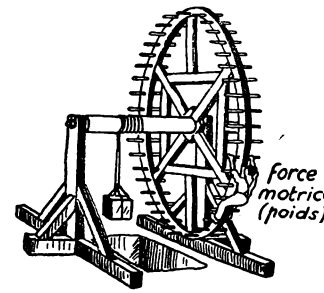


Fig. 17.

2. Avec quelle force faut-il tirer sur le brin libre du dispositif de la figure 16 pour soulever une charge pesant 120 *kilogrammes?* (on néglige le poids des poulies)? Quelle est l'intensité de la force qui tire sur le crochet de suspension de tout le dispositif?

3. Quelle charge peut-on soulever avec un palan différentiel de Weston dans lequel le rapport $\frac{r}{R} = \frac{11}{12}$, sachant qu'on exerce sur la chaîne une traction de 25 *kgp?*

4. Décrire le fonctionnement de l'ancien *treuil des carriers* (fig. 17). Justifier le grand diamètre de la roue.

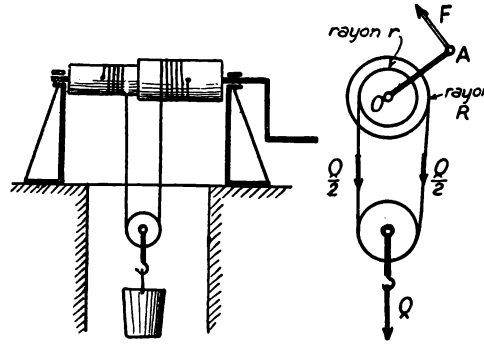


Fig. 18.

5. La figure 18 représente un treuil différentiel :

1° le décrire;

2° établir la condition d'équilibre;

3° calculer l'effort F lorsque R = 90 *mm*, *r* = 60 *mm*, *l* = 400 *mm*, Q = 80 *kilogrammes.*

6. Etablir un treuil à deux manivelles, capable de soulever une charge pesant 100 *kilogrammes.* La force qui agit sur chaque manivelle est de 10 *kgp.* Choisir la longueur des bras. (*On suppose les forces motrices perpendiculaires aux bras de manivelle.)*

Machines simples : Plan incliné, Vis, Coin, Clavettes.

I. PLAN INCLINÉ

1. Faits d'observation.

1. Pour charger une barrique sur sa voiture, le camionneur utilise une sorte d'échelle en pente sur laquelle il la fait rouler (fig. 1).

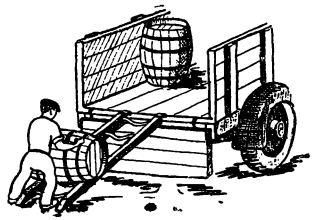


Fig. 1. — Cette solide échelle sur laquelle roule le tonneau est un *plan incliné.*

2. Observons les lacets d'une route sur le flanc d'une montagne abrupte. C'est une suite de plans inclinés qui facilite l'ascension de la montagne. Une voiture automobile ne saurait gravir une route tracée suivant une ligne de plus grande pente.

3. L'opération très délicate du lancement d'un navire exige la construction d'une piste qui l'amène progressivement depuis le chantier jusqu'à la mer (fig. 2).

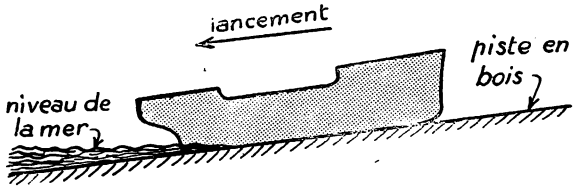


Fig. 2. — C'est sur un plan incliné que glisse le navire au moment de son lancement.

Nous pouvons dire que *le plan incliné facilite le transport des corps lourds d'un niveau à un autre.*

REMARQUE. — Posons un parallélépipède de fonte sur un marbre d'ajustage légèrement en pente : il demeure immobile.

Interposons entre les surfaces en contact de petits cylindres d'acier : le corps glisse vers le bas.

Dans le premier cas, c'est le frottement qui s'oppose au glissement. *Nous supposerons, dans ce qui suit, que la résistance due au frottement est nulle.*

2. Équilibre d'un corps sur un plan incliné.

A. EXPÉRIENCE. — Posons sur un plan incliné un chariot de poids P = 500 *grammes*, et cherchons la force F qui, parallèle à ce plan

maintient le mobile en équilibre. Nous trouvons par exemple F = 200 *grammes* (fig. 3).

La force P joue le rôle de *résistance* et la force F celui de la *force motrice.*

Recommençons l'expérience en augmentant l'angle α d'inclinaison. Nous constatons qu'il faut augmenter F pour maintenir l'équilibre.

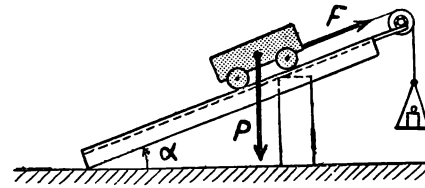


Fig. 3. — La force F qui maintient l'équilibre du chariot est d'autant plus grande que l'angle α est plus grand.

Ainsi, *pour une résistance donnée, la force motrice est d'autant plus grande que l'angle du plan incliné avec le plan horizontal est lui-même plus grand.*

B. Théorie de l'équilibre. — Soient : P le poids du corps;

α l'angle d'inclinaison sur le plan horizontal (fig. 4).

L'action du poids P se décompose en deux autres :

— *l'une N normale au plan incliné,* de valeur N = P cos α. Son effet est d'appuyer le corps sur son support. Elle est équilibrée par la réaction de celui-ci.

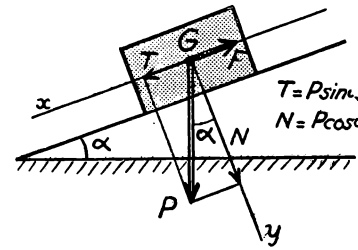


Fig. 4. — Il y a équilibre lorsque : F = P sin α.

— *l'autre T parallèle au plan incliné,* de valeur T = P sin α. Elle a pour effet de déplacer le corps vers le bas en le faisant glisser.

Pour qu'il y ait équilibre il suffit d'appliquer au corps solide une force F égale et directement opposée à T. Sa valeur numérique est donc :

$$F = P \sin \alpha$$

Cette formule montre bien que, pour un poids donné P, la force F est proportionnelle au sinus de l'angle α, donc croît avec cet angle.

Application numérique : *Le poids P du corps est* 15 *kg. Calculer la force F, parallèle au plan incliné, qui maintient ce corps en équilibre lorsque* α = 30°, 45°, 60°.

1° α = 30°	sin α = 0,5	F = 15 × 0,5	= **7,5 kgp**
2° α = 45°	sin α = 0,707	F = 15 × 0,707	= **10,6 kgp**
3° α = 60°	sin α = 0,866	F = 15 × 0,866	= **13 kgp**

3. L'équilibre peut être obtenu à l'aide d'une force parallèle au plan horizontal.

Soit F cette force (fig. 5). Si nous la décomposons suivant les directions G*x*, G*y* nous obtenons :

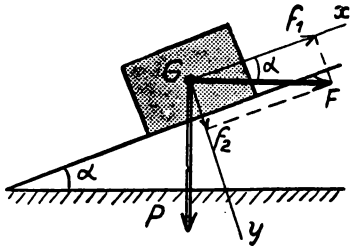


Fig. 5. — Dans ce cas l'équilibre est obtenu à l'aide d'une force dont l'intensité : $F = P \, tg \, \alpha$

une force f_2 qui tend à appliquer le corps sur le plan incliné;

une force f_1 qui seule empêche le corps de glisser vers le bas. On doit donc avoir : $f_1 = P \sin \alpha$.

Or $f_1 = F \cos \alpha$;

par suite $F \cos \alpha = P \sin \alpha$

d'où $F = P \, tg \, \alpha$.

Dans le cas particulier où

$P = 15 \, kg; \alpha = 30°$,

nous trouvons : tg 30° = 0,577

et $F = 15 \times 0{,}577 = 8{,}6 \, kgp$

II. VIS

4. Analogie entre la surface hélicoïdale d'un filet de vis et le plan incliné.

Observons une vis à filet carré. La surface hélicoïdale du filet est assimilable à un plan incliné de faible largeur enroulé en hélice autour du noyau (fig. 6).

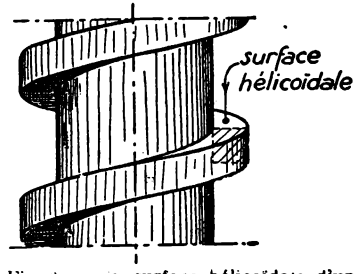


Fig. 6. — La surface hélicoïdale d'un filet de vis peut être assimilée à un plan incliné enroulé en hélice.

Nous admettrons que son inclinaison sur les génératrices du noyau est constante et égale à celle de *l'hélice moyenne*. Une spire de celle-ci peut être matérialisée par la diagonale AC d'un rectangle qu'on enroule sur un cylindre de rayon égal au *rayon moyen r* (fig. 7).

La longueur du rectangle étant $2\pi r$ et sa hauteur égale au pas p de la vis, l'angle α du plan horizontal avec le plan incliné enroulé en hélice est défini par sa tangente trigonométrique :

$$\text{tg } \alpha = \frac{DC}{DA} = \frac{l}{2\pi r}$$

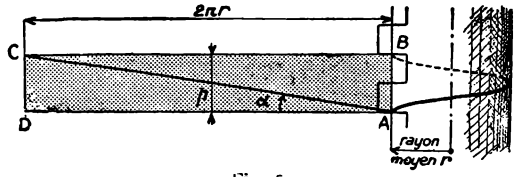


Fig. 7

5. Équilibre de la vis à filet carré (sans frottement).

PROBLÈME. — *On veut à l'aide d'un verin (fig. 8) soulever une charge Q. Quel est le moment du couple (P, P') qu'il faut faire agir sur la vis pour élever la charge?*

SOLUTION. — La vis est un solide en équilibre sous l'action des forces qui lui sont directement appliquées et des réactions de ses appuis.

1° *Forces directement appliquées.* Ce sont :

— Q : force verticale, sens de haut en bas;

— P et P' : forces horizontales, constituant un couple de moment $P \times L$.

2° *Réactions des appuis.* — La surface hélicoïdale inférieure S du filet de la vis s'appuie sur la surface hélicoïdale supérieure S' du filet de l'écrou (fig. 9). L'appui exerce sur chacun des points de S' une *force normale* à S'. Ces forces élémentaires peuvent être considérées comme appliquées sur l'hélice moyenne : soit f_1 l'une d'elles ; elles font toutes un angle α avec l'axe du cylindre (fig. 10).

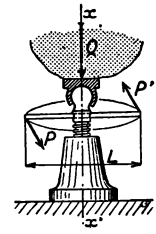


Fig. 8.

Fig. 9.

Toutes ces forces forment un *système en équilibre.*

1° La somme algébrique de leurs projections sur un axe dirigé quelconque est nulle.

2° La somme algébrique de leurs moments par rapport à un axe quelconque est nulle.

Choisissons comme axe dirigé l'axe géométrique $x'x$ du noyau (sens positif de haut en bas) :

1° $\text{proj}_{xx'} Q + \text{proj}_{xx'} P + \text{proj}_{x'x} P' + \text{proj}_{x'x} f_1 + \text{proj}_{x'x} f_2 + \ldots = 0.$

$Q + 0 + 0 - f_1 \cos\alpha - f_2 \cos\alpha - \ldots = 0.$

d'où : $Q = (f_1 + f_2 + f_3 + \ldots) \cos\alpha$

soit :

$$(f_1 + f_2 + f_3 + \ldots) = \frac{Q}{\cos\alpha} \quad (1)$$

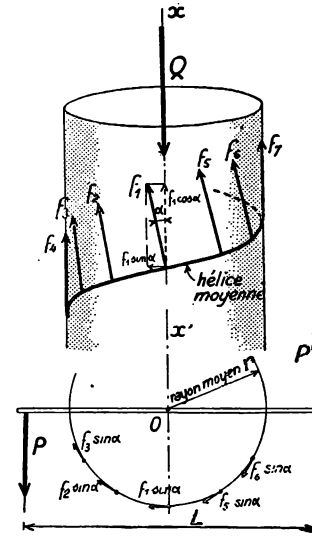


Fig. 10. — L'équilibre de la vis est réalisé quand :

$$L \times P = Q \times \frac{p}{2\pi}.$$

2° $\mathfrak{M}_{(x'x)} Q + \mathfrak{M}_{(x'x)} P + \mathfrak{M}_{(x'x)} P' + \mathfrak{M}_{(xx')} f_1 + \mathfrak{M}_{(x'x)} f_2 + \ldots = 0.$

$$0 + \frac{L}{2} \times P + \frac{L}{2} \times P' - r \times f_1 \sin\alpha - r \times f_2 \sin\alpha - \ldots = 0.$$

D'où $$L \times P = r\,(f_1 + f_2 + f_3 + \ldots) \sin\alpha$$

Soit en remplacant $(f_1 + f_2 + f_3 + \ldots)$ par sa valeur tirée de (1) :

$$L \times P = r \times Q \times \text{tg}\,\alpha.$$

Or $\text{tg}\ \alpha = \frac{p}{2\pi r}$, par suite :

$$L \times P = Q \times \frac{p}{2\pi}$$

6. Application numérique.

On considère un vérin destiné à soulever une charge maximum de 10 *tonnes. La vis a un pas de* 10 *millimètres ; calculer le moment du couple nécessaire à l'équilibre et en déduire l'effort P qu'il faudrait exercer à l'extrémité d'un bras de levier de* 1 *mètre pour produire le même effet.*

1° *Calcul du couple d'équilibre.*

Prenons le mètre comme unité de longueur, le kilogramme-poids comme unité de force. Le couple d'équilibre a pour moment :

$$\mathcal{M} = Q \times \frac{p}{2\pi} = 10\,000 \times \frac{0{,}01}{6{,}28} \simeq \textbf{\textit{16 m.kg}}$$

2° *Calcul de l'effort P.*

La force P agissant à l'extrémité d'un bras de levier de 1 mètre doit avoir un moment, par rapport à l'axe de la vis, égal à celui du couple.

$$1 \times P = 16 \text{ m.kg}$$

d'où : $P = \textbf{\textit{16 kgp}}$

Remarque. — En réalité le frottement a un rôle très important et nous l'avons négligé. Nous avons tous observé qu'une vis à un filet par exemple demeure immobile dans son écrou quelle que soit la charge qu'elle supporte. Le frottement suffit donc à réaliser à lui seul l'équilibre.

Cependant si l'angle α d'inclinaison de l'hélice est assez grand, ce qui a lieu dans une vis à plusieurs filets, celle-ci se met à tourner sous l'action de la résistance Q (faire l'expérience avec un tire-bouchon à vis).

III. COIN ET CLAVETTE

Le coin est un prisme à section triangulaire, en bois ou en acier, dont les applications sont nombreuses (fig. 11).

Le bûcheron utilise le coin pour fendre les troncs d'arbres ; la hache, le burin, le bédane, certains outils de tour, sont des *coins*. La clavette est généralement un *coin* dont on a supprimé le tranchant.

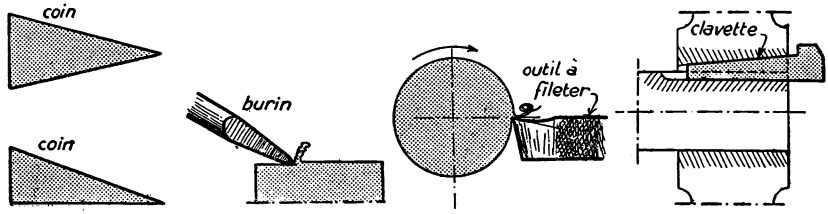


Fig. 11. — Voici différents types de coins.

7. Equilibre du coin (sans frottement).

On peut enfoncer le coin en frappant dessus (burin) ou en l'appuyant sur la pièce (outil de tour). Nous nous placerons dans cette dernière hypothèse.

Soit donc P la force qui presse sur la base AB d'un coin enfoncé dans un tronc d'arbre (fig. 12).

Transportons-la au point D de sa droite d'action et décomposons-la en deux forces F_1 et F_2 normales aux parois latérales AC et BC.

Les forces F_1 et F_2 tendent à *ouvrir* les parois de l'arbre en contact avec le coin. Elles sont équilibrées par les réactions R_1 et R_2 de ces parois.

Nous pouvons dire que le coin est en équilibre sous l'action des trois forces P, R_1 et R_2.

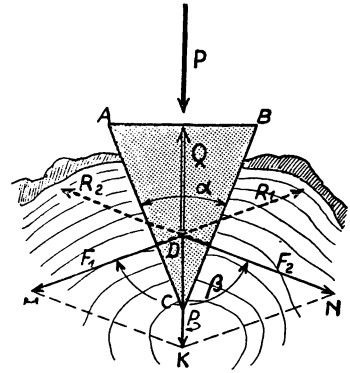


Fig. 12. — Sous l'action de la poussée P, l'arbre tend à s'ouvrir.

Or les forces F_1 et F_2 sont égales en raison de la symétrie de la figure; le parallélogramme des forces DMKN est un losange et nous avons vu que (18e leçon) :

$$P = 2F_1 \cos \frac{\beta}{2} = 2R_1 \cos \frac{\beta}{2}.$$

Les angles α et β étant supplémentaires $\frac{\beta}{2} = 90° - \frac{\alpha}{2}$ d'où :

$$\cos \frac{\beta}{2} = \sin \frac{\alpha}{2}$$

et par suite $$\boldsymbol{P = 2R_1 \sin \frac{\alpha}{2}}.$$

Nous voyons que *pour équilibrer une résistance donnée R_1, l'effort P à appliquer sur la base du coin est d'autant plus faible que l'angle α du tranchant est petit.*

Il y a donc intérêt à réduire cet angle dans la mesure où la résistance mécanique de l'outil demeure suffisante.

8. Clavettes.

Reportons-nous à la figure 12. Les réactions R_1 et R_2 ont une résultante Q, égale et opposée à P, qui tend à chasser le coin de son logement. Nous

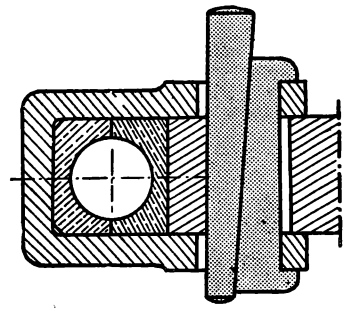


Fig. 13. — Tête de bielle à chape (assemblage des pièces par clavette et contre-clavette).

pouvons en effet observer qu'un coin d'angle trop obtus sort du bois dès que le coup de marteau est donné.

L'expérience montre que si l'angle est suffisamment faible, le coin demeure serré dans son logement lorsque la poussée P cesse d'exister. Cette propriété, due au frottement, est appliquée dans les *clavettes*.

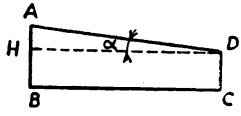


Fig. 14. — Définissez la pente de cette clavette.

Les volants, les poulies de transmissions, les engrenages, sont calés sur l'arbre par une clavette longitudinale (fig. 11).

Le serrage des coussinets sur une tête de bielle, la fixation d'une tige de piston sur son coulisseau, s'obtiennent à l'aide d'une clavette transversale (fig. 13).

Une clavette est un coin d'angle très aigu qui demeure en place dès qu'on l'a *forcé* dans son logement. On la caractérise par sa *pente :* c'est le rapport $\frac{AH}{HD} = \text{tg } \alpha$ (fig. 14).

Pour les clavettes normalisées, la pente est uniformément 1 %.

Pour les autres, les limites suivantes sont généralement adoptées :

Clavetages rarement démontés : pente comprise entre 1 % et 5 %.
— démontés : — — 5 % et 10 %.

Résumé.

1. — Le plan incliné est une machine qui facilite l'ascension ou la descente des corps lourds.

2. — Si l'on néglige le frottement, pour maintenir en équilibre un corps de poids P sur un plan incliné de l'angle α sur le plan horizontal, il faut exercer une force F telle que :
$F = P \sin \alpha$, si F est parallèle au plan incliné.
$F = P \text{ tg } \alpha$, si F est parallèle au plan horizontal.

3. — La vis permet d'équilibrer une lourde charge (ou d'exercer une forte poussée) à l'aide d'un couple.
Le moment du couple nécessaire à l'ascension d'une charge Q a pour expression (abstraction faite du frottement) :

$$\mathcal{M} = Q \times \frac{p}{2\pi} \qquad (p : \text{pas de la vis}).$$

4. — Le coin permet d'exercer des efforts considérables qui tendent à écarter les deux parties d'un même corps. Beaucoup d'outils sont basés sur cette propriété.

5. — Les clavettes sont des organes d'assemblage en forme de coin. Elles demeurent dans le logement où on les *force*, grâce au frottement.

Exercices.

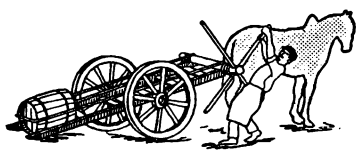


Fig. 15.

1. Pourquoi l'échelle employée par le camionneur pour monter la barrique doit-elle être solide?

De quelles machines simples se compose le haquet (fig. 15)?

2. La différence de niveau entre les deux stations d'un funiculaire est de 36 *m*. La longueur des voies est de 115 *m* (funiculaire de Montmartre, fig. 16).

a) calculer l'angle d'inclinaison du talus sur lequel montent les wagons,

b) l'effort maximum de traction du câble parallèle à la voie est de 4 100 *kgp*. Calculer poids total P du wagon et de sa charge limite.

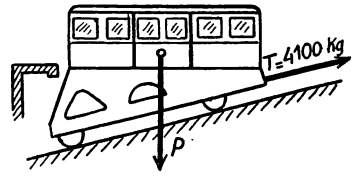


Fig. 16.

3. La vis d'un vérin de 8 *tonnes* a un pas 10 *mm*. Quelle force F faut-il exercer à 0,75 *m* de l'axe de la vis pour faire monter la charge maximum?

Quelle charge peut-on soulever avec le même vérin si F = 10 *kgp?*

4. La section d'un coin isocèle a les dimensions suivantes :

base : 40 mm *hauteur : 150 mm*

a) Calculer l'angle α du tranchant,

b) Le coin étant engagé dans un tronc d'arbre, quelles sont les forces qui tendent à le fendre si l'on place un poids de 40 *kg* sur la base du coin?

5. On considère l'étau d'ajusteur de la figure 17. En A on exerce un effort P = 20 *kgp*. Sachant que la vis a un pas de 8 *millimètres* calculer la pression Q qui s'exerce suivant son axe. En déduire la réaction N de la pièce serrée entre les mors de l'étau.

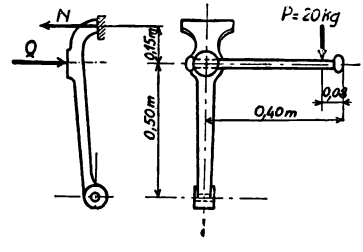


Fig. 17.

(En réalité le frottement qu'on néglige altère l'ordre de grandeur des résultats obtenus.)

3. DYNAMIQUE

38e LEÇON

Principe de la conservation du mouvement ou principe de l'inertie.

1. Inertie d'un corps au repos.

Un livre posé sur une table, un caillou sur le sol, demeurent immobiles aussi longtemps qu'ils sont abandonnés à eux-mêmes.

Pour les mettre en mouvement, il faut faire agir sur eux une *force.*

2. Inertie d'un corps en mouvement.

Lançons une bille d'acier sur un plancher horizontal bien uni. Elle roule en ligne droite, ralentit et s'arrête.

Avec la même impulsion au départ, la bille roulerait beaucoup plus longtemps sur une glace horizontale bien polie.

Dans les deux cas la bille s'arrête : c'est que le frottement sur la glace et la résistance de l'air la font ralentir progressivement.

Nous concevons sans peine que si ces forces retardatrices n'existaient pas, la bille continuerait à se mouvoir indéfiniment en ligne droite, sans pouvoir d'elle-même aller plus vite ou plus lentement. Son mouvement serait donc rectiligne uniforme.

3. Énoncé du principe de l'inertie.

Les observations qui précèdent nous suggèrent le principe suivant :

Lorsqu'un corps inanimé n'est soumis à aucune force :

1° ***s'il est au repos, il demeure indéfiniment au repos ;***

2° ***s'il est en mouvement, il ne peut modifier ni la grandeur, ni la direction de sa vitesse. Son mouvement est donc rectiligne uniforme.***

4. Conséquences du principe de l'inertie.

PREMIÈRE CONSÉQUENCE. — *Tout mobile animé d'un mouvement qui n'est ni rectiligne ni uniforme, est soumis à l'action d'une force ou de plusieurs forces non en équilibre.*

EXEMPLES. — *a*) On lance une bille sur une table horizontale (fig. 1). Le mouvement est rectiligne uniforme de A en B (abstraction faite du frottement et de la résistance de l'air).

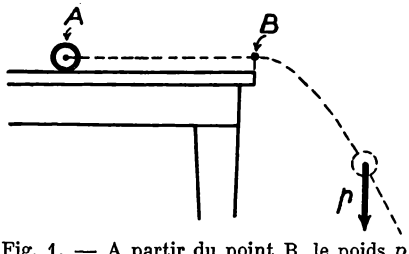


Fig. 1. — A partir du point B, le poids p de la bille cesse d'être équilibré par la réaction de la table. Le mouvement cesse d'être rectiligne uniforme.

De B en C la trajectoire du centre de la bille est parabolique et sa vitesse croît pendant la chute. La force qui agit est le poids de la bille qui n'est plus équilibré par la réaction de la table.

b) Le centre de gravité d'un projectile décrit, après la sortie de l'arme, une trajectoire courbe, d'un mouvement dont la vitesse varie à chaque instant en direction et grandeur. Les forces qui agissent sont le poids du projectile, la résistance de l'air, l'action du vent.

DEUXIÈME CONSÉQUENCE. — *Nouvelle définition de la vitesse d'un point à un instant donné.*

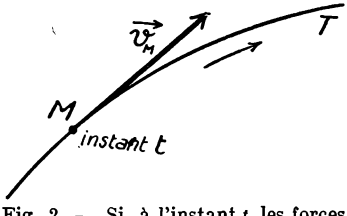


Fig. 2. — Si, à l'instant t, les forces qui sollicitent le mobile M cessent d'agir, le mouvement devient rectiligne uniforme, de vitesse constante v_M.

Soit M un point mobile sur une trajectoire T (fig. 2).

Imaginons que l'on puisse, à partir d'un instant quelconque t, supprimer toutes les forces qui le sollicitent.

En vertu du principe de l'inertie, il conserve, dans son mouvement ultérieur, la vitesse $\vec{v}$ qu'il avait à l'instant t. A partir de cet instant, il se meut donc en ligne droite d'un mouvement uniforme de vitesse $\vec{v}$.

D'où cette autre définition de la vitesse instantanée d'un point mobile :

A un instant t, la vitesse d'un point mobile animé d'un mouvement quelconque, est la vitesse du mouvement rectiligne uniforme que prendrait ce point si l'on supprimait à cet instant les forces qui agissent sur lui.

EFFETS ET APPLICATIONS DE L'INERTIE.

5. Effets de l'inertie des corps au repos.

Expérience 1. — Plaçons sur une table une feuille de bristol et sur cette feuille un poids de fonte (fig. 3).

a) Tirons lentement sur la feuille. Le poids se déplace en même temps.

b) Recommençons en tirant brusquement. Le poids reste en place.

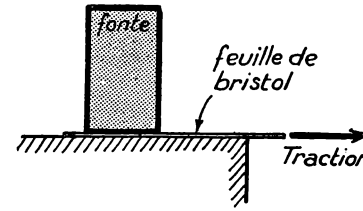


Fig. 3. — En tirant brusquement sur la feuille de bristol, le bloc de fonte reste en place. Une *force d'inertie* semble s'opposer à son mouvement.

Conclusion. — *Un corps oppose une résistance à sa mise en mouvement. Cette résistance est d'autant plus grande que le corps est plus lourd et le mouvement qu'on veut lui imprimer plus accéléré.*

Tout se passe comme s'il était retenu par une force à laquelle on donne le nom de ***force d'inertie.***

Application. — Le transporteur à secousses de la figure 4 est une transposition industrielle de l'expérience ci-dessus.

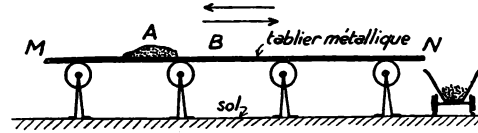


Fig. 4. — *Transporteur à secousses :* le tablier est animé d'un mouvement lent de gauche à droite suivi d'un mouvement brusque de droite à gauche. La matière avance par secousses de M en N.

1er *temps :* le tablier métallique recule brusquement en arrière. Le corps A reste immobile par rapport au sol, mais glisse par rapport au tablier.

2e *temps:* le tablier avance lentement vers la droite. Le corps A vient en B.

3e *temps:* même mouvement qu'au 1er temps.

Par avances successives, le corps à transporter (grains, scories) va de M en N.

Expérience 2. — Un poids de 5 *kgp* repose sur le sol (fig. 5). Tirons dessus lentement à l'aide d'une ficelle; le poids s'élève.

Recommençons en tirant brusquement. La ficelle casse.

Cette expérience, dont la conclusion est identique à celle de l'expérience précédente, explique pourquoi il faut agir progressivement sur le câble qui tire ou qui remorque une charge (wagon, cage d'ascenseur ou de puits de mine, navire, etc.).

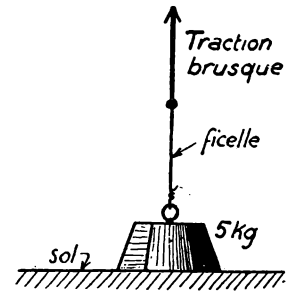


Fig. 5. — En tirant brusquement, la ficelle casse. Une *force d'inertie* s'oppose au mouvement du poids.

De plus, ce câble doit être tendu à l'instant où la traction s'exerce. C'est ainsi que sur la figure 6, au moment du démarrage, le moteur qui commande le treuil ne rencontrant aucune résistance, se met à tourner rapidement : le câble se tend en coup de fouet et peut se rompre.

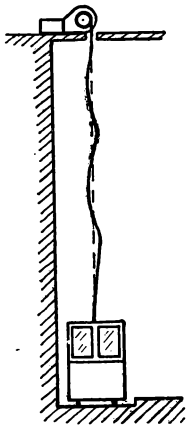


Fig. 6. — Si au moment du démarrage le câble est lâche, il risque de se rompre lorsqu'il se tend.

6. Effets de l'inertie des corps en mouvement.

Expérience. — Un poids de 5 *kgp* est suspendu par une ficelle attachée à un point fixe. Soulevons-le et laissons-le tomber : *la ficelle casse.*

Une fois tendue, la ficelle retient le corps et tend à l'arrêter. Puisqu'elle casse, c'est donc que le corps en mouvement exerce sur elle *une force plus grande que son poids :* à celui-ci s'ajoute une force qui tend à détruire tout obstacle au mouvement.

Conclusion. — *Lorsqu'un corps est en mouvement, il résiste à toute cause qui tend à ralentir ou à accélérer son mouvement.*

Cette résistance est aussi une *force d'inertie.*

Applications. — 1. C'est un effet du même genre qui projette les voyageurs les uns sur les autres lors de l'arrêt brusque d'un véhicule. Les conséquences en sont parfois très graves.

C'est pourquoi il est nécessaire d'arrimer à l'aide de cales, de cordages ou de chaînes, le matériel transporté sur wagon-plate-forme (surtout s'il s'agit de matériel roulant : automobiles, machines agricoles, etc.), car les arrêts brusques, comme les démarrages, sont dangereux.

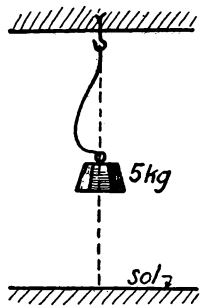


Fig. 7. — Lorsqu'elle se tend, la corde casse : un corps en mouvement résiste à la force qui tend à l'arrêter.

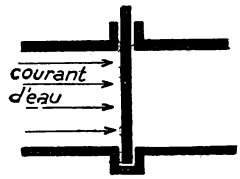


Fig. 8. — Si l'on interrompt brusquement un courant d'eau à l'aide d'une vanne, il y a *coup de bélier.* C'est encore un effet de l'inertie.

2. Lorsqu'une charge suspendue à un câble descend, il est nécessaire de ralentir avant l'arrêt.

3. L'ouvrier qui tente de freiner à la main la courroie de commande d'une machine-outil est un imprudent ; l'inertie des pièces en mouvement peut suffire à provoquer l'entraînement de la main jusque sur la poulie, où elle se trouve prise sous la courroie.

4. Si dans une conduite où circule de l'eau, on interpose brusquement une cloison (fig. 8), les particules liquides heurtent la paroi et se heurtent mutuellement, car le débit à tendance à persister. Il en résulte un choc

hydraulique appelé *coup de bélier*. Il est capable de briser la conduite ou d'en altérer la résistance. C'est pourquoi :

a) la fermeture de toute vanne s'opère lentement (faible pas de la vis de commande);

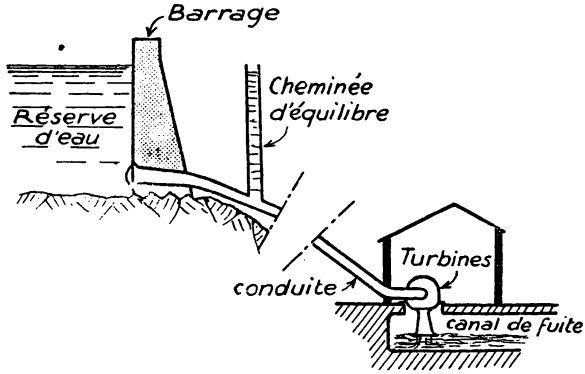


Fig. 9. — En cas de coup de bélier dans la conduite, l'eau en mouvement s'élimine par la *cheminée d'équilibre*.

b) dans certaines installations d'énergie hydraulique, les conduites forcées sont pourvues de cheminées d'équilibre (fig. 9).

Par ailleurs, le phénomène du coup de bélier est utilisé dans le bélier hydraulique, appareil élévatoire d'eau.

Résumé.

1. *Principe de l'inertie.* — Lorsqu'un corps inanimé n'est soumis à aucune force :
1° S'il est au repos, il demeure indéfiniment au repos;
2° S'il est en mouvement, il ne peut modifier ni la grandeur, ni la direction de sa vitesse. Son mouvement est donc rectiligne uniforme.

2. — De ce principe, on déduit que lorsqu'un corps est animé d'un mouvement quelconque, sa vitesse à un instant *t* est la vitesse du mouvement uniforme qu'il prendrait si l'on supprimait, à cet instant, les forces qui agissent sur lui.

Exercices.

D'après le principe de l'inertie, un corps en mouvement tend à conserver la même vitesse et la même direction.

Appliquer ce principe aux exemples suivants :

1. Un cycliste descend une côte à vive allure. Par inadvertance, il bloque les freins de la roue avant. Qu'advient-il?

2. Dans une gare de marchandises, une locomotive pousse sur une voie horizontale un wagon non attelé. La machine s'arrête. Que fait le wagon?

3. Un train entre en gare. Le mécanicien ferme l'arrivée de vapeur dans les cylindres moteurs de la locomotive. Que se passe-t-il? Pourquoi faut-il bloquer les freins?

4. L'ajusteur qui emmanche une lime ou un marteau en frappe le manche sur l'établi comme l'indique la figure 10. Expliquer ce qui se passe.

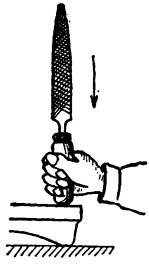


Fig. 10.

Fig. 11.

Fig. 12.

5. Il est imprudent de descendre d'une voiture en marche. Pourquoi le voyageur de la figure 11 se penche-t-il en arrière?

6. On intercale souvent entre le câble de traction et la charge à soulever un ressort d'amortissement (fig. 12). Analyser ce qui se passe à l'instant d'un démarrage brusque.

7. Justifier de la même manière l'emploi de ressorts pour la suspension des voitures.

LECTURE.

Galilée, le premier, énonce le principe fondamental de la conservation du mouvement

GALILÉE, dans son ouvrage célèbre *Discours et démonstrations mathématiques...* publié en 1638, quelques années seulement avant sa mort, énonça pour la première fois le principe de la conservation du mouvement sous la forme curieuse que voici :

On doit remarquer que tout degré de vitesse se trouvant dans un mobile lui appartient par sa nature même, **d'une façon indestructible,** *si l'on écarte les causes extérieures d'accélération ou de ralentissement, ce qui se produit seulement dans un plan horizontal ; car, comme le mouvement est accéléré dans la descente sur un plan incliné et retardé dans la montée, il en résulte que, dans un plan horizontal, le mouvement est* **éternel.**

Ainsi, à partir de constatations particulières, et qui sont d'expérience idéale plutôt que réelle, Galilée, allant au delà de l'expérience, affirme la *conservation de la vitesse, quelle que soit sa direction ;* car la phrase sur le plan horizontal qui vient ensuite paraît n'être qu'une indication pour réaliser l'expérience.

Un corps lancé et abandonné complètement à lui-même, conservant sa vitesse (en direction et grandeur), se meut donc, d'après Galilée, d'un *mouvement éternel,* rectiligne et uniforme, contrairement à ce qu'on avait toujours affirmé avant lui.

Naturellement, ces idées nouvelles soulevèrent d'abord de violentes critiques. Mais la vérité a toujours le dernier mot.

Loi fondamentale de la Dynamique[1].

$$\boldsymbol{F} = M\gamma.$$

1. Effet d'une force constante[2] sollicitant un corps libre.

1. Abandonnons une pierre en chute libre. Son poids, *force constante* en direction, sens et grandeur, lui communique un mouvement *uniformément accéléré*. L'*accélération, de grandeur constante*, a même direction et même sens que la force qui provoque le mouvement (fig. 1) :

2. Lançons la pierre verticalement vers le haut. Le mouvement d'ascension est *uniformément retardé*. La *décélération de grandeur constante* a même direction et même sens que le *poids constant* de la pierre qui freine le mouvement (fig. 2).

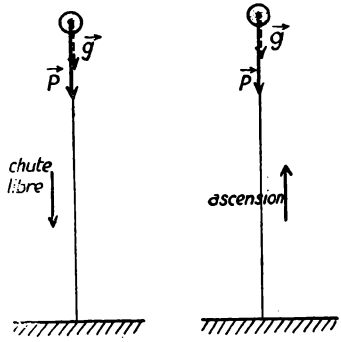


Fig. 1 et 2. — Pendant la chute libre comme pendant l'ascension, le vecteur-accélération $\vec{g}$ a le même sens que le vecteur-force $\vec{P}$.

3. Expérience. — Un petit chariot monorail est tiré par un poids p. Nous pouvons le considérer comme un corps libre pour tout déplacement le long du rail horizontal (fig. 3).

Mesurons à l'aide d'un curseur sur

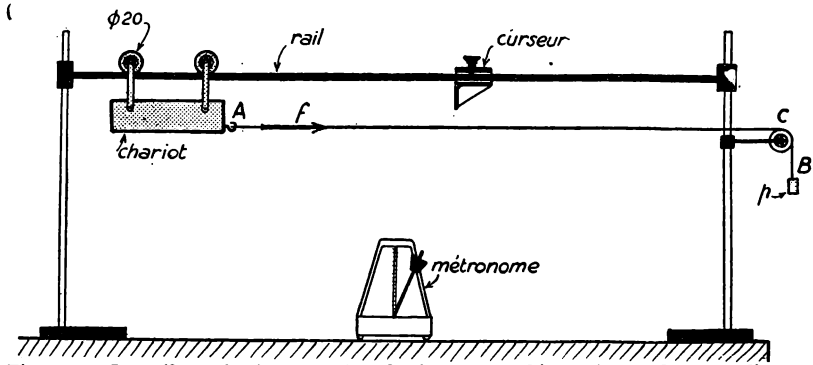


Fig. 3. — Le rail est horizontal. Le chariot est mobile grâce à deux poulies très légères en aluminium, montées sur roulements à billes; son poids peut être augmenté ou diminué à l'aide de surcharges de 10 grammes placées dans ce chariot.

1. Revoir la définition de la masse d'un corps (Physique 1re Année).
2. Il est entendu une fois pour toutes que par *force constante*, il faut entendre une *force constante en direction, sens et grandeur.*

lequel vient buter le chariot, les espaces parcourus par le mobile au bout de 1, 2, 3... unités de temps, comptées à l'aide d'un métronome.

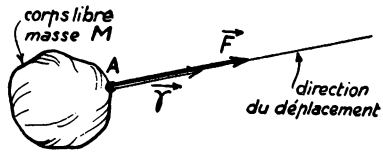


Fig. 4. — Une force constante communique au corps libre qu'elle sollicite, une accélération constante, de même direction et de même sens que cette force.

Nous constatons qu'ils sont proportionnels aux carrés des temps employés à les parcourir.

Le mouvement du chariot est donc rectiligne uniformément accéléré. L'accélération a même direction et même sens que la force qui tire le chariot.

Concluons : ***une force constante communique à un corps libre qu'elle sollicite une accélération constante de même direction et de même sens que cette force.*** (Fig. 4.)

2. Quels sont les facteurs de l'accélération?

Quelles grandeurs *mécaniques* pouvons-nous faire varier quand nous faisons agir une force constante sur un mobile? Rien d'autre que l'intensité de la *force* et la *masse* du mobile.

Force et masse sont donc les seuls facteurs de l'accélération. Nous allons chercher expérimentalement quelle est l'influence de chacun d'eux.

Nous procéderons suivant les règles classiques de la méthode expérimentale. Dans une *première série d'expériences* nous laisserons l'un des facteurs invariable, la masse par exemple; et nous ferons agir successivement sur elle des forces constantes mais d'intensités de plus en plus grandes : et nous verrons comment varient les accélérations prises par cette masses.

Dans une *seconde série d'expériences* nous laisserons la force invariable; nous la ferons agir successivement sur des masses de plus en plus grandes : et nous verrons encore comment varient les accélérations prises par ces masses.

3. Première série d'expériences : forces constantes, mais d'intensités de plus en plus grandes, agissant sur une masse constante.

1er Essai. — Enlevons du chariot une surcharge de 10 grammes-poids et plaçons-la en B à l'extrémité du cordonnet.

Si nous négligeons la masse du cordonnet et celle de la poulie C, la masse totale du système mobile (chariot + poids moteur) est de ***300 grammes-masse.***

La force ***f*** est de ***10 grammes-poids***[1].

Pour mesurer l'accélération du mouvement il suffit de rappeler que le

1. En réalité *f* est inférieur à *p*, mais si peu, dans ce cas particulier, que nous pouvons négliger la différence; nous apprendrons plus tard à calculer la valeur exacte de *f*.

nombre qui la mesure est égal au double du nombre qui mesure l'espace parcouru pendant la première seconde. Nous trouvons :

$$\gamma = 14 \ cm/s/s$$

2e Essai. — Ajoutons en B une surchage de 10 grammes-poids prise au chariot. La masse totale de l'équipage mobile n'a pas changé, mais la force motrice $f' = 20$ *grammes-poids.*

Elle est deux fois plus grande. Mesurons l'accélération correspondante, nous trouvons :

$$\gamma' = 28 \ cm/s/s$$

3e Essai. — Procédons comme précédemment avec une force motrice $f'' = 30$ *grammes-poids*. Nous trouvons une accélération :

$$\gamma'' = 42 \ cm/s/s$$

Nous voyons que lorsque la force devient 2, 3, ... *n* fois plus grande, l'accélération devient également 2, 3, ... *n* fois plus grande (fig. 5).

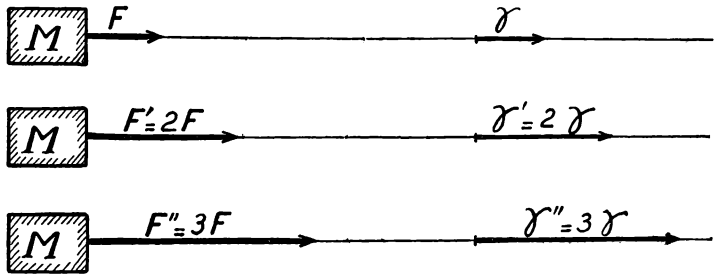


Fig. 5. — **La masse M est constante.** Quand la force devient 2, 3, ...*n*, fois *plus grande*, l'accélération devient 2, 3, ...*n*, fois *plus grande*,

Conclusion. — ***Lorsque plusieurs forces constantes agissent successivement sur un même corps mobile, elles lui communiquent des accélérations proportionnelles à ces forces.***

Masse constante { *Forces agissantes :* $f\ f'\ f''$; *Accélérations correspondantes :* $\gamma\ \gamma'\ \gamma''$.

$$\frac{f}{\gamma} = \frac{f'}{\gamma'} = \frac{f''}{\gamma''} = \dots$$

4. Deuxième série d'expériences : force constante agissant sur des masses de plus en plus grandes.

Expérience. — Doublons la masse du chariot. Elle devient alors de ***600 grammes-masse.***

Plaçons en B deux surcharges de 10 *grammes* prélevées dans le chariot. La force motrice est alors de 20 *grammes-poids.*

Mesurons de nouveau l'accélération : elle est maintenant :

$$\gamma = 14 \text{ cm/s/s}$$

Or, ***la même force motrice,*** 20 grammes-poids, communique à une masse de ***300 grammes-masse*** une accélération $\gamma = 28$ *cm/s/s.* (2e Essai de la première série d'expériences).

Nous constatons que si la masse du corps mobile devient deux fois

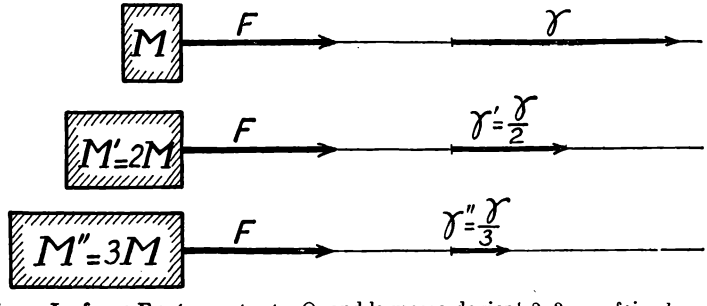


Fig. 6. — **La force F est constante.** Quand la masse devient 2, 3, *n*... fois *plus grande*, l'accélération devient 2, 3, *n*... fois *plus petite.*

plus grande et si la force motrice reste constante, l'accélération devient deux fois plus petite (fig. 6).

Conclusion. — ***Lorsqu'une force constante agit sur des corps de masses différentes, elle leur communique des accélérations inversement proportionnelles à ces masses.***

Force constante { *Masses sur lesquelles elle agit :* $M\ M'\ M''$. *Accélérations prises par ces masses :* $\gamma\ \gamma'\ \gamma''$.

$$M\gamma = M'\gamma' = M''\gamma'' = \ldots$$

5. Choix des unités de force et de masse.

Nous utiliserons dans la suite trois systèmes d'unités :

MKS — CGS — MTS

Dans le système MKS (mètre, kilogramme-poids, seconde); l'unité d'accélération est le mètre par seconde par seconde; l'unité de force le kilogramme-poids; l'unité de masse dérive des unités précédentes, *c'est,* ***par définition,*** *la masse qui prend une accélération égale à l'unité* (1 *m/s/s*) *sous l'action d'une force constante égale à l'unité* (1 *kilogramme-poids*).

Dans le système CGS (centimètre, gramme-masse, seconde) l'unité d'accélération est le centimètre par seconde par seconde, l'unité de masse le gramme-masse; l'unité de force dérive des unités précédentes : *c'est,* ***par définition,*** *la force qui communique à l'unité de masse* (1 *gramme-*

masse) *l'unité d'accélération* (1 *cm/s/s*). Cette unité a reçu le nom de ***dyne.***

Enfin, *dans le système MTS* (mètre, tonne-masse, seconde), l'unité d'accélération est le mètre par seconde par seconde, l'unité de masse la tonne-masse; l'unité de force dérive des unités précédentes : *c'est encore,* ***par définition,*** *la force qui communique à* 1 *tonne-masse une accélération égale à* 1 *m s/s.*

Cette unité a reçu le nom de ***sthène.***

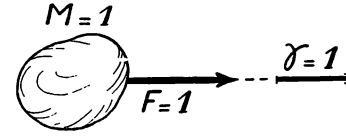


Fig. 7. — Dans chacun des systèmes CGS — MTS — MKS, l'unité de force est la force constante qui communique l'unité d'accélération à l'unité de masse.

REMARQUE TRÈS IMPORTANTE. — Il est essentiel de remarquer que, dans chacun de ces trois systèmes, ***l'unité de force est la force constante qui communique l'unité d'accélération à l'unité de masse*** (fig. 7).

6. Formule fondamentale de la Dynamique : $F = M\gamma$.

Les théorèmes précédents et les conventions relatives au choix des unités nous permettent de résoudre le problème suivant :

Quelle est l'accélération γ *que prend un mobile de masse M sous l'action d'une force F?* (fig. 8).

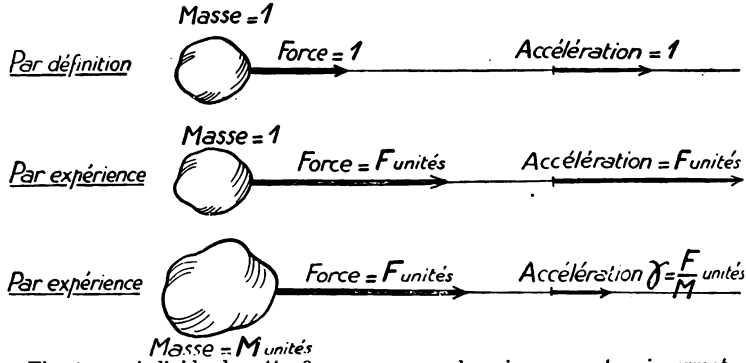


Fig. 8. — A l'aide de cette figure, reprenez le raisonnement qui permet d'établir la loi $F = M \times \gamma$.

1° Une force de 1 *unité* donne à une masse de 1 *unité* une accélération de 1 *unité*
2° — F *unités* — de 1 *unité* — F *unités*
3° — F *unités* — de M *unités* — $\frac{F}{M}$ *unités*

La grandeur de l'accélération cherchée est donc : $\gamma = \frac{F}{M}$, d'où l'on tire :

$$F = M\gamma$$

Cette formule est une des plus importantes de la Mécanique. Nous allons en faire immédiatement des applications.

1. — *Quelle force faut-il faire agir sur une masse de* 125 *grammes pour lui communiquer une accélération de* 2 *m/s/s?*

Employons le *système CGS*. Ici :

$$M = 125, \quad \gamma = 200$$ (l'accélération est en effet 200 *cm/s/s*).

La force F cherchée est : $F = 125 \times 200 = 25\,000$ ***dynes***.

2. — *Un autobus pesant* 10 *tonnes peut ralentir très rapidement grâce à des freins puissants. La décélération est de* 7 *m/s/s. Calculer dans le système MTS la force qui le fait arrêter.*

L'autobus pesant 10 tonnes-poids, sa masse est de 10 *tonnes-masse*. Dans le système MTS :

$$M = 10, \quad \gamma = 7.$$

La force retardatrice, qui a le même sens que la décélération, a pour valeur numérique :

$$F = 10 \times 7 = \textbf{\textit{70 sthènes}}.$$

7. Formule P = Mg.

Appliquons la formule $F = M\gamma$ à un corps tombant en chute libre sous l'action de son poids P. Il prend l'accélération constante g. Sa masse M est donc telle que :

$$\boldsymbol{P = Mg} \quad \text{ou} \quad \boldsymbol{M = \frac{P}{g}}.$$

Nous allons en faire quelques applications.

1. — *Un corps pèse* 15 *kgp. Quelle en est la mesure de sa masse dans le système MKS?*

Appliquons la formule $M = \frac{P}{g}$ en ayant soin de remplacer P et g par leurs valeurs dans le système en question (MKS).

$$P = 15 \qquad g = 9{,}81.$$

Donc $$M = \frac{15}{9{,}81} = \textbf{\textit{1,53 unités de masse MKS}}.$$

REMARQUE. — ***Pour exprimer en unités MKS la masse d'un corps pesant P kilogrammes, il suffit de diviser le nombre P par 9,81.***

2. — *Quelle est la force exprimée en kilogrammes-poids qu'il faut faire agir sur un corps pesant* 7 *kgp pour lui communiquer une accélération de* 1,5 *m/s/s?*

Utilisons le *système d'unités MKS*.

Le corps pèse 7 kgp. Sa masse est donc : $\frac{7}{9{,}81}$ unités MKS : $M = \frac{7}{9{,}81}$

D'autre part, $$\gamma = 1{,}5$$

Donc :

$$F = M \times \gamma = \frac{7}{9{,}81} \times 1{,}5 \simeq \textbf{\textit{1,07 kgp}}$$

3. — *Un corps pesant* 5 *kgp est posé sur le plancher d'un ascenseur. Que se passe-t-il lorsque l'ascenseur monte avec une accélération de* 1 *m/s/s au départ?*

Nous utiliserons le *système MKS*.

Au repos (fig. 9) le plancher exerce sur le corps une réaction égale et opposée au poids P : soit 5 *kgp*.

Pendant le démarrage la réaction R du plan et le poids P ont une résultante R — P : c'est cette force R — P qui communique au corps de masse $M = \frac{P}{g}$ une accélération égale à 1 *m/s/s*. On a donc :

$$R - P = M \times \gamma = \frac{5}{9.81} \times 1 \simeq \mathbf{0{,}510\ kgp}$$

Cette résultante est dirigée verticalement vers le haut.

On voit que :

$$R = P + 0{,}510 = 5 + 0{,}510 = 5{,}510\ kgp.$$

En vertu du principe d'égalité de l'action et de la réaction, le corps réagit sur le plancher avec une force égale à 5,510 *kgp* dirigée verticalement vers le bas : autrement dit, il presse sur le plancher avec une force égale à 5,510 *kgp*.

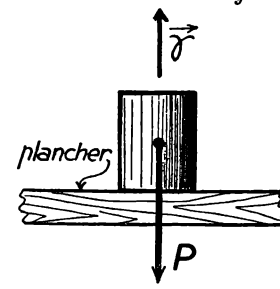


Fig. 9.

Ce résultat est à rapprocher de l'impression ressentie lorsqu'on emprunte un ascenseur. Au démarrage, il semble bien qu'on appuie davantage sur le plancher si l'ascenseur monte.

8. La relation F = Mγ est une égalité vectorielle.

Nous avons en effet montré au début de la leçon que la force et l'accélération qu'elle communique à un corps libre ont même direction et même sens (fig. 5).

Il en résulte que *l'intensité du vecteur force* $\vec{F}$ est égal à M fois l'intensité du vecteur accélération $\vec{\gamma}$.

C'est pourquoi on a l'égalité vectorielle :

$$\vec{F} = M\vec{\gamma}.$$

Résumé.

1. Une force constante en grandeur, direction et sens, communique au corps libre auquel elle est appliquée une accélération constante de même direction et de même sens que cette force.

2. Lorsque plusieurs forces agissent successivement sur un même corps libre, elles lui communiquent des accélérations proportionnelles à ces forces.

3. Une même force constante en direction, sens et grandeur, communique à des corps de masses différentes des accélérations inversement proportionnelles à ces masses.

4. Formule fondamentale de la Dynamique

$$\boxed{F = M\gamma}$$

5. Dans le système pratique M K S (mètre, kilogramme-poids, seconde) la masse M d'un corps s'obtient en divisant le nombre qui mesure son poids exprimé en kilogramme-poids par le nombre 9,81 qui mesure l'accélération de la pesanteur exprimée en *m/s/s* : $M = \frac{P}{g}$.

Exercices.

1. Une automobile pesant 1 000 *kilogrammes* est arrêtée sur une route en palier. A l'instant du démarrage, tout se passe comme si elle était tirée par une force constante de 50 *kilogrammes-poids.*

1° Quelle accélération prendra-t-elle ?

2° Quel chemin aura-t-elle parcouru au bout de 5 secondes et quelle sera sa vitesse à cet instant ?

2. Quelle est la force de traction d'une locomotive qui communique à un train de 300 *tonnes-poids*, partant du repos, une vitesse de 20 *mètres par seconde* au bout de 200 *secondes* d'un mouvement uniformément accéléré ? ($g \simeq 10$ *m/s/s*).

3. Un projectile pesant 100 *kilogrammes* est lancé par un canon dont le tube a une longueur de 10 *mètres.*

La durée du trajet dans le canon est de 0,05 *seconde.*

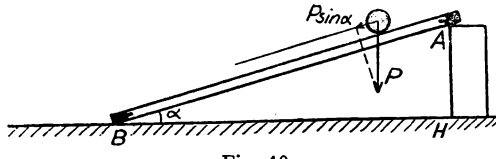


Fig. 10.

En supposant constante la poussée P des gaz de la poudre, le mouvement du projectile dans le tube est uniformément accéléré :

1° Calculer l'accélération de ce mouvement et la vitesse du projectile à sa sortie ;

2° Quelle est la force propulsive des gaz résultant de la combustion de la poudre ?

Prendre $g = 10$ *m/s/s* pour simplifier les calculs.)

4. Une petite bille d'acier est assimilée à un point matériel glissant sur une planchette inclinée d'un angle α sur le plan horizontal (fig. 10).

a) Montrer que l'accélération $\gamma = g \sin \alpha$.

b) Que devient cette accélération lorsque AH devient 2, 3 fois plus grand, la longueur AB demeurant constante ?

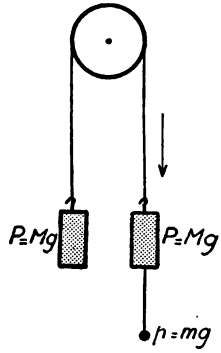


Fig. 11.

5. On considère le dispositif de la figure 11. Deux cylindres égaux de poids P et de masse M sont fixés à un fil s'enroulant sur une poulie et se font équilibre. On ajoute un poids *p* de masse *m* qui provoque le mouvement.

Exprimer l'accélération du mouvement qui prend naissance (Machine d'Atwood). La poulie est considérée comme ayant un moment d'inertie négligeable.

Application numérique : P = 500 *grammes ; p* = 30 *grammes ; g* = 9,81 *m/s/s.*

6. Un autobus pesant 8 *tonnes*, lancé à la vitesse de 50 *km/h*, peut s'arrêter sur une distance de 13,5 *m* à la suite d'un freinage énergique.

En supposant que le mouvement est uniformément retardé, calculer :

1° la décélération γ ;

2° La force F (exprimée en *kgp*), capable de produire le même effet que les freins.

LECTURE.

Deux hommes de génie.

L'année où mourait Galilée, NEWTON naissait.

Le premier avait vécu 78 ans (1564-1642) ; le second atteint l'âge de 85 ans (1642-1727).

Galilée découvrit les principes de la dynamique à la suite de longues expériences. Il apporta dans ses recherches la véritable méthode scientifique, inspirée par un esprit profondément philosophique. Il observait les phénomènes sans idée préconçue, puis en tirait toutes les conséquences logiques.

Après ce philosophe incomparable, vint le mathématicien de génie. Newton poursuit en mécanique l'œuvre de Galilée.

Celui-ci avait découvert le principe de la conservation du mouvement; il avait montré qu'une force constante agissant sur un mobile lui communique une accélération constante; il avait trouvé les lois de la chute des corps, du pendule, du mouvement des projectiles, ... etc.

Newton reprend la notion de force telle que l'avait comprise Galilée, il établit l'identité de la pesanteur et de l'attraction universelle; il analyse les mouvements des planètes, des satellites, des eaux de la mer et est conduit aux lois de la mécanique céleste que *Laplace* devait compléter et préciser; il expose le principe de l'action et de la réaction, il distingue la masse d'un corps de son poids, explique dynamiquement le problème de la composition des forces. Bref, il constitue définitivement la mécanique et donne à ses lois une forme qui est encore acceptée aujourd'hui : les savants avaient dès lors en main les moyens de faire progresser cette science et d'en tirer les applications qui transformèrent la vie matérielle des peuples.

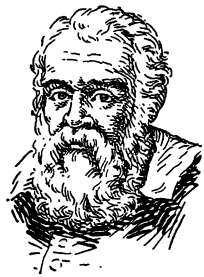


FIG. 12. — GALILÉE, savant italien (1564-1642).

FIG. 13. — NEWTON (1642-1727), illustre savant anglais.

(Figures extraites de *Les Sciences par l'observation et l'expérience.* Édition 1938, pages 13 et 42. Fonds Delagrave.)

Effet d'un couple moteur constant sur un corps mobile autour d'un axe. Moment d'inertie.

1. Un couple constant, agissant sur un corps mobile autour d'un axe, lui communique un mouvement de rotation uniformément accéléré.

Expérience. — Utilisons le dispositif de la figure 1. Un système mobile autour d'un axe horizontal $x'x$ est constitué par une poulie et un tube en duralumin qui peut recevoir deux masses m, également distantes de l'axe.

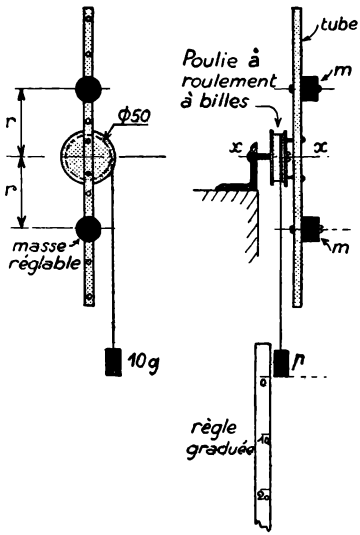


Fig. 1. — Le mouvement de chute du poids p est uniformément accéléré (*accélération* γ). Comment faire pour le vérifier?

Un cordonnet, fixé par une de ses extrémités à la poulie, s'enroule sur elle. Il est tiré par un poids :

$$p = 10 \text{ grammes.}$$

L'action de ce poids est équivalente, comme nous l'avons montré précédemment :

1° à une ***force*** p_1 équipollente à p, appliquée au A sur la poulie (fig. 2);

2° à un ***couple*** (p, p_2) également appliqué sur la poulie.

La force p_1 appuie la poulie sur le roulement à billes; elle est équilibrée par la réaction de cet appui.

Le couple (p, p_2), qui n'est équilibré par aucun autre, fait tourner la poulie : nous l'appellerons, pour cette raison, *couple moteur*. Son moment $\mathfrak{M}$ a ici pour valeur numérique :

$$\mathfrak{M} = R \times p = 2{,}5 \times 10 = 25 \text{ cm.gp}$$

Le poids est d'abord soutenu en face du 0 de la règle graduée, puis abandonné à lui-même. Il tombe lentement, entraînant la poulie.

Mesurons, par tâtonnements, comme nous l'avons fait maintes fois

déjà, les espaces parcourus par le poids après 1, 2, 3... secondes de chute : nous constatons que *son mouvement est uniformément accéléré.*

Or, le cordonnet ne glisse pas sur la poulie : donc le point B de la poulie a même vitesse linéaire que le point C du cordonnet avec lequel il est en contact, et, par suite, même vitesse linéaire que le poids moteur : le mouvement de rotation de la poulie est uniformément accéléré.

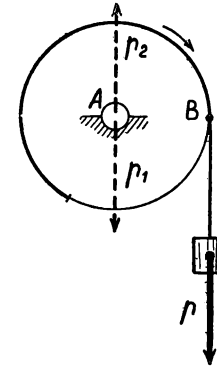


Fig. 2. — Sous l'action du couple moteur constant (p, p_2), le corps tourne d'un mouvement uniformément accéléré. L'*accélération angulaire* $\omega' = \frac{\gamma}{R}$ (R rayon de la poulie).

2. Accélération angulaire.

Soit γ l'accélération *constante* prise par le poids moteur dans l'expérience précédente. Comme il part du repos, sa vitesse au bout de t secondes est :

$$v_t = \gamma t$$

Chaque point de la gorge de la poulie a la *même vitesse linéaire* v_t. Comme sa distance à l'axe de rotation est R, sa ***vitesse angulaire*** à l'instant t est :

$$\omega_t = \frac{v_t}{R} = \frac{\gamma t}{R} = \omega' t$$

en désignant par ω' la quantité constante $\frac{\gamma}{R}$ (γ est constant, R aussi).

La vitesse angulaire de la poulie s'accroît donc, chaque seconde, de la quantité ω'.

Cette quantité ω' mérite donc (par analogie avec ce qui a été dit pour le mouvement rectiligne uniformément accéléré) le nom d'***accélération angulaire***[1] qui lui est donné.

En conséquence, nous pouvons énoncer le théorème suivant : ***un couple moteur constant agissant sur un corps mobile autour d'un axe lui communique une accélération angulaire constante.***

REMARQUE. — Ce théorème est, pour un corps qui tourne sous l'action d'un couple moteur constant, le correspondant de celui qui a été énoncé pour un corps libre soumis à l'action d'une force constante.

Un *corps libre*, soumis à une *force constante*, prend une *accélération constante*. Un *corps qui peut tourner*, soumis à un *couple constant*, prend une *accélération angulaire* constante.

3. L'accélération angulaire est proportionnelle au moment du couple moteur.

EXPÉRIENCE. — Recommençons les mesures précédentes après avoir

1. Comme la vitesse angulaire s'exprime en *radians par seconde*, l'accélération angulaire s'exprimera en *radians par seconde par seconde* (r/s/s).

doublé le poids moteur ($p' = 20\ gp$). Le couple moteur devient :

$$\mathcal{M}' = R \times p' = 2{,}5 \times 20 = 50\ cm.gp$$

Il est 2 fois plus grand.

Nous constatons que l'accélération du mouvement de chute du poids moteur devient sensiblement 2 fois plus grande [1]; il en est de même de l'accélération angulaire de la poulie, ce qui justifie l'énoncé de ce théorème : *l'accélération angulaire est proportionnelle au couple moteur* [2].

4. L'accélération angulaire est inversement proportionnelle à la masse du corps qui tourne.

EXPÉRIENCE. — Reprenons le couple moteur constant des premières expériences : $\mathcal{M} = 25\ cm.\ gp.$

Remplaçons les masses égales portées par le tube par des masses deux fois plus grandes, placées à la même distance.

Nous vérifions, en mesurant les espaces parcourus par le poids moteur, que l'accélération angulaire est sensiblement deux fois plus petite que dans le premier cas.

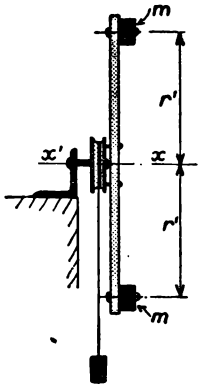


Fig. 3. — En éloignant les masses m de l'axe de rotation l'accélération angulaire ω' diminue.

CONCLUSION. — *L'accélération angulaire prise par un corps qui tourne sous l'action d'un couple moteur constant est inversement proportionnelle à la masse du corps tournant.*

5. L'accélération angulaire varie avec la distance des masses à l'axe de rotation.

EXPÉRIENCE. — Toujours avec le même dispositif, étudions l'influence de la distance r des masses réglables à l'axe de rotation.

Nous laissons constant le couple moteur (par exemple $\mathcal{M} = 25\ cm.gp.$).

Eloignons les masses de l'axe $x'x$ (fig. 3) : *l'accélération angulaire diminue.*

Rapprochons-les : l'accélération angulaire augmente.

Ainsi plus la matière qui constitue le corps tournant est éloignée de l'axe de rotation, plus elle résiste à l'action accélératrice du couple moteur : plus le ***moment d'inertie*** du corps est grand.

Les expériences qui précèdent montrent que le moment d'inertie d'un corps qui tourne dépend à la fois des masses qui le constituent et de leurs distances à l'axe de rotation.

1. Plus la masse du poids moteur est petite par rapport aux masses en rotation, plus les frottements de la poulie sur son axe sont faibles, plus la vérification est précise.

2. Comparer cet énoncé et celui de la proportionalité de l'accélération aux forces qui agissent sur un corps libre.

MOMENTS D'INERTIE

6. Moments d'inertie des corps homogènes de formes usuelles.

On appelle moment d'inertie d'un point matériel de masse m, distant de r de l'axe de rotation, le produit $m \times r^2$.

Le moment d'inertie d'un corps solide par rapport à un axe de rotation est égal à la *somme* des moments d'inertie, par rapport au même axe, de tous les points matériels dont il est formé. Nous écrirons :

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \ldots\ldots = \Sigma\, mr^2.$$

La méthode mathématique[1] qui permet de calculer le moment d'inertie d'un corps tournant, sort du cadre de cet ouvrage. Nous allons indiquer les valeurs de I pour quelques solides simples homogènes.

A. Barre de faible section tournant autour d'un axe perpendiculaire en son milieu (fig. 4).

Soient : M la masse de la barre; L sa longueur.

Son moment d'inertie : $I = \dfrac{ML^2}{12}$

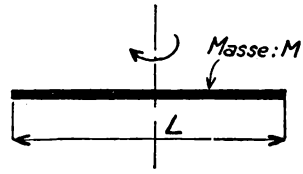


Fig. 4. — Le moment d'inertie de la barre par rapport à l'axe de rotation qui passe en son milieu est : $\frac{ML^2}{12}$.

B. Cylindre de révolution tournant autour de son axe (fig. 5).

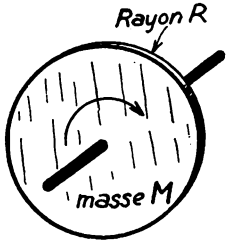


Fig. 5. — Le moment d'inertie du cylindre tournant autour de son axe est : $I = \dfrac{MR^2}{2}$.

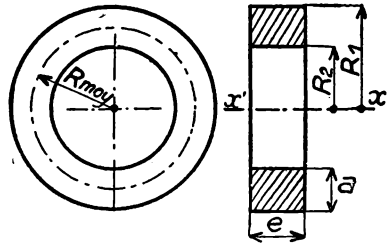


Fig. 6. — Le moment d'inertie de l'anneau tournant autour de $x'x$ est :

$$I = M\left(R^2_{moy} + \frac{a^2}{4}\right).$$

Si M est sa masse, R son rayon, son moment d'inertie I est :

$$I = \frac{MR^2}{2}$$

1. Voir Cours d'Algèbre, 4e A des Écoles Nationales Professionnelles.

D. Anneau cylindrique (fig. 6, v. page 313).

On peut considérer cet anneau comme dérivant d'un cylindre de rayon R_1 (moment d'inertie I_1) dont on aurait retranché un autre cylindre de rayon R_2 (moment d'inertie I_2).

Le moment d'inertie total I est égal à la différence : $I_1 - I_2$.

Soient M_1 la masse du cylindre de rayon R_1

M_2 — — R_2.

On a : $$I = \frac{M_1 R_1^2}{2} - \frac{M_2 R_2^2}{2}.$$

EXERCICE. *Soit* $R_{moy.}$ *le rayon moyen* $\left(R_{moy.} = \frac{R_1 + R_2}{2}\right)$. *Si l'on appelle* a *la hauteur de la jante* (fig. 7), *montrer que le moment d'inertie vaut :*

$$I = M\left(R_{moy}^2 + \frac{a^2}{4}\right). \qquad (M : \text{masse de l'anneau})$$

7. Calcul de la valeur numérique d'un moment d'inertie.

Nous utiliserons toujours le système MKS employé par les mécaniciens.

Soit un cylindre de fonte de 400 *millimètres de diamètre et de* 40 *millimètres d'épaisseur (poids spécifique de la fonte* 7,2 *kgp/dm³). Calculons son moment d'inertie par rapport à son axe.*

On a : $M = \frac{P}{g}$ (P en ***kgp***; $g = 9{,}81$ *m/s/s* à Paris).

Or, P = poids spécifique en kgp/dm³ × volume en dm³.

$$V = \pi R^2 \times e.$$

Or, $\begin{cases} R = 2dm & R^2 = 4dm^2 \\ e = 0{,}4dm \end{cases}$

Donc : $V = 3{,}14 \times 4 \times 0{,}4 = 5{,}024\ dm^3$

D'où $P = 7{,}2 \times 5{,}024 \simeq 36$ kgp

La masse est donc égale à :

$$M = \frac{P}{g} = \frac{36}{9{,}81} \simeq 3{,}68 \text{ unités de masse MKS}$$

Le moment d'inertie par rapport à l'axe géométrique est :

$$I = \frac{MR^2}{2}.$$

L'unité de longueur dans le système MKS étant le mètre, il faut, dans cette formule, exprimer R en mètres, soit :

$$R = 0{,}2\ m \qquad R^2 = 0{,}04.$$

Le moment d'inertie cherché a donc pour valeur :

$$I = \frac{3{,}68 \times 0{,}04}{2} = 0{,}073\ 6 \text{ unités MKS.}$$

FORMULE $\mathcal{M} = I\omega'$

8. Il existe une relation entre le couple moteur, le moment d'inertie et l'accélération angulaire.

Soit un corps mobile autour d'un axe. Désignons par :
$\mathcal{M}$: la valeur du *moment du couple moteur;*
I : la valeur du *moment d'inertie* du corps par rapport à l'axe de rotation;
ω' : la valeur de l'*accélération angulaire* prise par le mobile.
On démontre le théorème suivant :

Le moment du couple moteur est égal au produit du moment d'inertie par l'accélération angulaire :

$$\mathcal{M} = I\omega' \qquad (1)$$

Remarque 1. — Cette formule est analogue à la formule fondamentale de la dynamique :

$$F = M\gamma$$

qui s'applique à un corps libre :

à la force *F*, cause du mouvement, correspond le moment $\mathcal{M}$ du couple moteur;
à la masse *M*, qui caractérise l'inertie du corps libre, correspond le moment d'inertie *I*;
à l'accélération linéaire γ correspond l'accélération angulaire ω'.

Remarque 2. — On tire de (1)

$$\omega' = \frac{\mathcal{M}}{I}$$

qui exprime :
1° que l'accélération angulaire est directement proportionnelle au moment $\mathcal{M}$ du couple moteur;
2° qu'elle est inversement proportionnelle au moment d'inertie du corps qui tourne.

Résumé.

1. Lorsqu'un corps mobile autour d'un axe se met en mouvement sous l'action d'un couple constant, son mouvement de rotation est uniformément accéléré.

2. L'accélération angulaire du mouvement de rotation est d'autant plus grande que le couple moteur est grand, que la masse est faible, que cette masse est plus rapprochée de l'axe de rotation.

3. Le *moment d'inertie* d'un corps mobile autour d'un axe caractérise la résistance du corps à l'action accélératrice du couple moteur.

4. Si $\mathcal{M}$ est le moment du couple moteur qui agit sur un corps mobile autour d'un axe, I le moment d'inertie de ce corps par rapport à l'axe, ω' l'accélération angulaire prise par le corps :

$$\mathcal{M} = I\,\omega'$$

Exercices.

1. Un patineur tourne sur place très rapidement en écartant les bras. Il ramène ceux-ci le long de son corps. Que se passe-t-il ?
Que doit-il faire pour ralentir ?

2. Une tige d'acier (section 15 mm^2 — longueur 400 *mm*) tourne autour d'un axe perpendiculaire en son milieu.

Calculer son moment d'inertie. (Poids spécifique de l'acier : 7,6 kgp/dm^3).

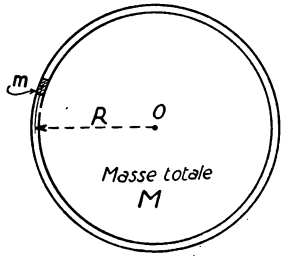


Fig. 7.

3. Montrer que le moment d'inertie d'un cerceau (fig. 7) tournant autour d'un axe perpendiculaire en O au plan de figure est $I = MR^2$.

4. Calculer le moment d'inertie, par rapport à son axe, d'une meule d'affûtage (diamètre 180 *mm*, épaisseur 25 *mm*, poids 1,24 *kg*).

5. Les dimensions de la jante du volant de fonte représenté sur la figure 6 sont les suivantes :

R *moy* = 2 *mètres*, *a* = 30 *centimètres*,
e = 20 *centimètres*.

Calculer son moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation.

6. On considère 2 disques semblables, de même matière, dont le rapport des dimensions est 2. Montrer que le rapport des moments d'inertie est 32.

LECTURE. — Quelques idées fausses des Anciens sur le mouvement d'un corps abandonné à lui-même

Les Anciens croyaient qu'un corps lancé reçoit un élan, une impulsion qui demeure en lui après que le contact avec le moteur a cessé : mais que cette impulsion diminue d'elle-même avec le temps pour s'éteindre finalement. *Le corps s'arrête donc peu à peu,* DE LUI-MÊME, *sans intervention d'aucune cause extérieure.*

D'autre part, un grand philosophe grec dont les ouvrages ont fixé, pendant des siècles, les limites du savoir humain : ARISTOTE (384-322 av. J.-C.), avait affirmé que le seul mouvement qui puisse être continu était *le mouvement circulaire.* Et personne avant *Galilée* n'avait critiqué cette affirmation.

De sorte que les Anciens pensaient que tout corps lancé et complètement abandonné à lui-même — donc soustrait à la pesanteur, à la résistance de l'air, à tout frottement sur d'autres corps solides ou fluides — prend un mouvement circulaire dont la vitesse va en décroissant peu à peu et finit par s'annuler.

C'est à Galilée que revient l'honneur d'avoir détruit ces idées fausses en énonçant, le premier, un principe qui est à la base de la mécanique : le principe de l'inertie que nous avons appelé, de préférence, le *principe de la conservation du mouvement.*

Travail mécanique[1].

1. Les deux facteurs du travail sont la force et le déplacement.

Observons un cheval attelé à un tombereau. *Il le fait avancer :* on dit qu'il *produit du travail.*

1° Si le tombereau était trop chargé et la route trop en pente, *le cheval déploierait en vain toute sa force* sans déplacer le chariot. Il se fatiguerait beaucoup, mais ne produirait *aucun travail.*

Pour qu'il y ait travail il faut donc qu'il y ait *déplacement.*

2° Deux chevaux sont attelés en flèche. Le premier ne tire pas sur ses traits : il avance *sans produire de travail.*

Pour qu'il y ait production de travail mécanique, il faut qu'il y ait *force.*

Deux facteurs interviennent donc dans la production du travail mécanique : ***la force*** et ***le déplacement.***

On dit qu'une force travaille quand il y a déplacement de son point d'application.

2. Le travail mécanique est une grandeur mesurable.

On peut en effet définir l'égalité de deux travaux ainsi qu'un travail 2, 3,... *n* fois plus grand qu'un autre.

EXEMPLES. — Deux livreurs qui montent chacun un sac de 50 *kg* de charbon au 1er étage d'une maison produisent le même travail.

Chacun d'eux produit deux fois plus de travail s'il monte *un* sac au 2e étage ou s'il monte deux sacs au lieu d'un au 1er étage.

Le travail est donc proportionnel à l'intensité de la force et à la longueur du déplacement.

I. TRAVAIL D'UNE FORCE CONSTANTE EN DIRECTION, SENS ET GRANDEUR

3. Premier cas : le point d'application de la force F glisse sur la droite d'action de cette force.

Soit une force F constante en direction, sens et grandeur, appliquée en un point A d'un corps solide en mouvement (fig. 1).

Soit *l* le déplacement de son point d'application sur sa droite d'action. Par définition :

1. Nous emploierons souvent le mot *travail* pour désigner le TRAVAIL MÉCANIQUE.

Le travail A de la force F pour le déplacement l est égal au produit de l'intensité de cette force par la longueur du déplacement.

$$A = F \times l \quad (1)$$

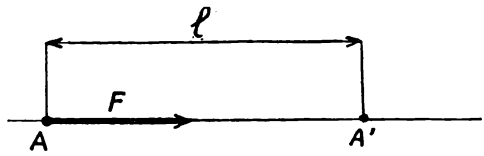


Fig. 1. — Pour un déplacement *l*, de même direction que la force *F*, le travail mis en jeu a pour valeur : $A = F \times l$.

L'unité pratique de travail est le ***kilogrammètre*** *(symbole* ***kg.m****)*. C'est le travail produit par une force de 1 *kgp* qui déplace son point d'application de 1 *m* dans sa propre direction.

EXEMPLE NUMÉRIQUE. — *Un poids de 5 kgp tombe d'une hauteur de 4,5 m. Évaluer le travail correspondant.*

Ici F = 5 *kgp*, *l* = 4,5 *m*. Le travail du poids au cours de la chute est :

$$A = 5 \times 4{,}5 = \mathbf{22{,}5\ kg.m}$$

REMARQUE. — Le travail et le moment d'une force sont deux grandeurs mesurées par le produit de l'intensité de cette force par une longueur. Il ne faut toutefois pas les confondre, car le moment d'une force est indépendant de tout mouvement.

4. Deuxième cas : le point d'application de la force F glisse sur une droite faisant l'angle α avec la direction de la force.

Considérons une sphère qui roule de A en B le long d'un plan incliné (fig. 2). Le point d'application de son poids P décrit une droite parallèle à ce plan.

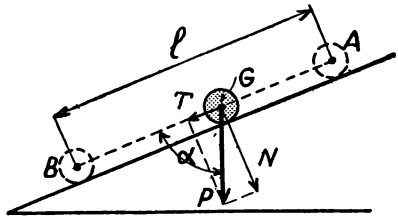


Fig. 2. — De A en B le poids P produit un travail. $A = T \times l = P \cos \alpha \times l$.

Soit α l'angle de la direction de la force avec la direction du déplacement. Nous savons qu'on peut substituer à la force P deux forces fictives dont elle est la résultante :

1° L'une N dite *composante normale* du poids P, perpendiculaire au plan incliné; elle appuie la sphère sur ce plan et n'a aucun effet utile sur le mouvement, car si elle existait seule le corps resterait immobile; elle ne produit donc aucun travail;

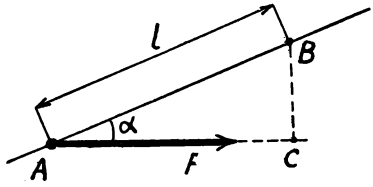


Fig. 3. — Ici, la force constante F, dont le point d'application se déplace d'une longueur *l*, produit un travail : $A = Fl \cos \alpha$.

2° l'autre T dite *composante tangentielle* du poids P; son point d'application G décrit, sur sa direction, un segment de droite de longueur *l;* le travail correspondant $A = T \times l$.

Le travail de la force P se réduit

donc à celui de sa composante T et comme T = P cos α, il en résulte que : A = P cos $\alpha \times l$.

D'une manière générale, le travail d'une force F, constante en grandeur, direction et sens, pour un déplacement rectiligne de longueur l, faisant avec la direction de la force un angle α (fig. 3) a pour expression :

$$A = F \times l \times \cos \alpha \qquad (2)$$

REMARQUE. — Cette formule peut s'écrire A = (F cos α) $\times$ l. Sous cette forme, on voit que *le travail de la force F, pour le déplacement* l, *est égal au produit du déplacement* l *par la projection de la force* (*F cos* α) *sur la direction du déplacement.*

EXEMPLE NUMÉRIQUE. — *Quel est le travail accompli à chaque coup de rabot par un menuisier qui exerce un effort de* 5 *kgp dirigé comme l'indique la figure* 4?

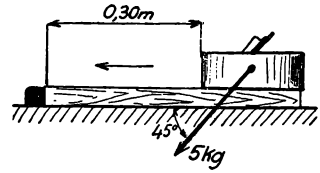


Fig. 4. — Calculez le travail correspondant à un coup de rabot.

Les données du problème sont :

F = 5 *kgp*; $\alpha = 45°$; cos 45° = 0,707 ; $l = 0{,}30\ m$

Le travail correspondant à un coup de rabot est donc :

$$A = 5 \times 0{,}707 \times 0{,}3 = \mathbf{1{,}06\ kg.m}$$

REMARQUE. — La formule (2) contient implicitement la formule (1).

En effet, pour $\alpha = 0$, cos $\alpha = 1$ et A = F $\times$ l.

En particulier, si $\alpha = 90°$, cos 90° = 0 et A = 0. Ce qui montre que le travail d'une force dont le point d'application glisse sur une droite perpendiculaire à sa direction est nul.

5. Troisième cas : le point d'application de la force constante décrit une ligne quelconque.

Remarquons tout d'abord que la formule (2) peut s'écrire : A = F $\times$ (l cos α). Sous cette forme, nous voyons que : *le travail de la force F pour le déplacement l est égal au produit de l'intensité de cette force par la projection du déplacement sur sa direction.*

On a en effet en considérant le triangle rectangle ABC (fig. 3) :

AC = AB cos α = l cos α. Or AC est la projection de l sur la direction de la force F.

Appliquons cette remarque au travail effectué par une force F constante en direction, sens et grandeur, dont le point d'application décrit une ligne brisée A, B, C, D, E (fig. 5).

Projetons cette ligne sur une parallèle à la direction de la force F.

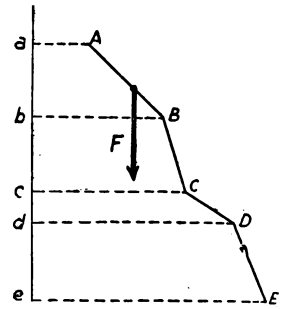


Fig. 5. — Le long du chemin ABCDE, la force F produit un travail égal à $A = F \times ae$.

Nous pouvons écrire :

Travail de F de A en B : $= F \times ab$
Travail de F de B en C : $= F \times bc$
Travail de F de C en D : $= F \times cd$
Travail de F de D en E : $= F \times de$

D'où *travail de F de A en E :*

$$A = F\,(ab + bc + cd + de) = F \times ae.$$

Si le chemin parcouru par le point d'application de la force F est une ligne courbe (fig. 6), on peut considérer celle-ci comme formée d'une infinité d'éléments rectilignes AB, BC, CD, etc.

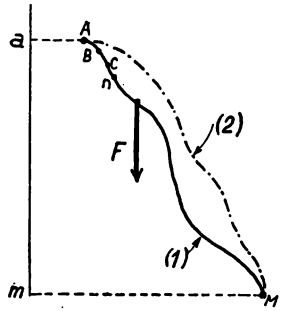


Fig. 6. — Le travail d'une force constante F ne dépend que des positions initiale et finale de son point d'application.

On peut encore écrire :

Travail de F de A en M : $A = F \times am.$

REMARQUE. — Imaginons que le point d'application de la force F décrive les trajectoires (1) ou (2) de la figure 6. Dans les deux cas, le travail effectué par cette force de A en M est le même. Donc :

Le travail d'une force F constante en direction, sens et grandeur, ne dépend pas de la forme de la trajectoire, mais seulement des positions initiale et finale de son point d'application.

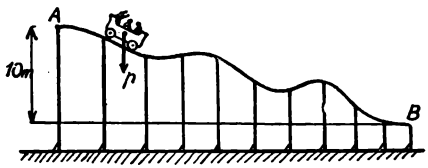


Fig. 7.

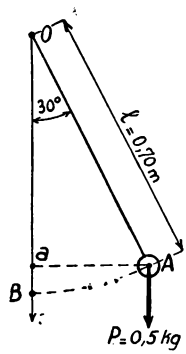


Fig. 8. — De A en B le travail du poids P est : $A = P \times aB.$

EXEMPLES NUMÉRIQUES. — 1. *Un chariot pesant 400 kg suit un profil de montagnes russes. Les points A et B sont à des niveaux distants de 10 mètres (fig. 7). Évaluer le travail produit par le poids du chariot de A en B.*

Le poids du chariot est une force constante en direction, sens et grandeur. La projection du chemin AB sur la verticale est de 10 *mètres*. Par suite :

$$A = 400 \times 10 = \mathbf{4\,000\ kg.m}$$

2. *La masse d'un pendule est de 0,5 kg. On l'abandonne après l'avoir écartée d'un angle* $\alpha = 30°$ *(fig. 8).*

Calculer le travail du poids lorsque le pendule passe pour la première fois en B.

La masse du pendule étant de 0,5 *kg*, son poids est de

0,5 *kilogrammes-poids.* C'est une force constante en direction, sens et grandeur.

Le chemin parcouru par son point d'application est l'arc $\overset{\frown}{AB}$, dont la projection sur la verticale Ox est aB.

Or $aB = OB - Oa = OA - OA \cos 30° = OA\,(1 - \cos 30°)$.

$aB = 0{,}7\,(1 - 0{,}866) = 0{,}0938\ m$

et $A \doteq 0{,}5 \times 0{,}0938 = \boldsymbol{0{,}047\ kg.m}$

II. TRAVAIL D'UNE FORCE DE GRANDEUR CONSTANTE OU D'UN COUPLE QUI TOURNE AUTOUR D'UN AXE

6. Travail d'une force qui tourne autour d'un axe.

Imaginons qu'une force F constante en grandeur se déplace de la manière suivante :

1° son point d'application décrit les côtés d'un polygone régulier nscrit dans un cercle de rayon R (fig. 9);

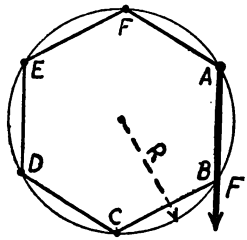


Fig. 9.

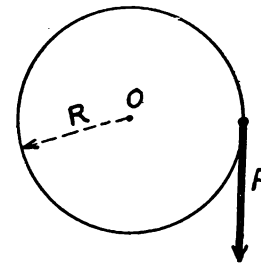


Fig. 10. — A chaque tour la force F produit un travail : $A = F \times 2\pi R$.

2° au cours des déplacements successifs AB, BC, CD, ... cette force a pour droite d'action les côtés de ce polygone.

Le travail accompli après un tour est donc :

$A = (F \times AB) + (F \times BC) + (F \times CD) + \ldots$

ou $A = F\,(AB + BC + CD + \ldots) = F \times$ *périmètre du polygone.*

Lorsqu'on fait croître indéfiniment le nombre des côtés, le polygone tend vers un cercle auquel la force F est tangente (fig. 10).

Le *travail, pour un tour,* de la force tangentielle F est alors égal à :

$$\boldsymbol{A_{1\ tour} = F \times 2\pi R.}$$

Calculons le travail A de la force F lorsque le rayon O a tourné d'un *angle* θ *exprimé en radians.*

Puisqu'un tour correspond à 2π radians, à θ radians correspondent à

$$\frac{1 \times \theta}{2\pi} = \frac{\theta}{2\pi} \text{ tours.}$$

Par suite : $A = F \times 2\pi \times R \times \frac{\theta}{2\pi} = R \times F \times \theta.$

Or $R \times F$ n'est autre que le moment $\mathcal{M}$ de la force F par rapport au point O, donc :

$$A = \mathcal{M} \times \theta.$$

GÉNÉRALISONS : ***le travail accompli par une force de grandeur constante F, appliquée sur un solide mobile autour d'un axe, est égal au produit du moment de cette force par rapport à l'axe, par l'angle exprimé en radians dont le solide a tourné.***

REMARQUE. — Pour exprimer A en *kg.m* il faudra évaluer $\mathcal{M}$ en *m.kg*.

EXEMPLE NUMÉRIQUE. — *On exerce sur la poignée d'une manivelle un effort tangentiel constant de* 15 *kilogrammes. Le bras de manivelle est de* 0,40 *m. Calculer le travail accompli au bout de* 25 *tours* (prendre $\pi = 3{,}14$).

Le moment $\mathcal{M}$ de la force considérée a pour valeur numérique

$$\mathcal{M} = 15 \times 0{,}4 = 6 \ m.kg$$

L'angle θ est égal à autant de fois 2π *radians* qu'il y a de tours, soit :

$$\theta = 2 \times 3{,}14 \times 25 = 157 \ radians.$$

Donc le travail accompli est

$$A = \mathcal{M} \times \theta = 6 \times 157 = \mathbf{942 \ kg.m}$$

NOTA. — Nous aurions pu tout aussi bien utiliser la formule $A = F \times 2\pi R$ qui donne le travail accompli à chaque tour. Nous laissons au lecteur le soin de reprendre le raisonnement.

7. Travail d'un couple qui tourne autour d'un axe.

Soient : F l'intensité de chacune des forces du couple;
d leur bras de levier (fig. 11).

Les points d'application A et B décrivent un cercle de rayon $R = \frac{d}{2}$ et le travail accompli par chaque force à chaque tour est :

$$F \times 2\pi R = F \times \pi d.$$

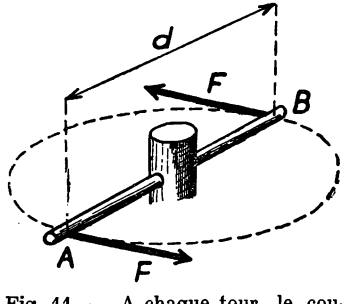


Fig. 11. — A chaque tour, le couple appliqué à la barre AB produit un travail : $A = \mathcal{M} \times 2\pi$.

Le travail total pour un tour est donc : $A_{1 \text{ tour}} = 2F \times \pi d = d \times F \times 2\pi$.

Or $d \times F$ n'est autre que le moment $\mathcal{M}$ du couple; par suite :

$$A_{1 \text{ tour}} = \mathcal{M} \times 2\pi.$$

Si l'on désigne par θ le nombre de radians dont a tourné le bras de levier du couple, le travail correspondant est évidemment :

$$A = \mathcal{M} \times \theta.$$

Résumé.

1. Une force travaille lorsqu'elle déplace son point d'application.

2. Le travail d'une force F ***constante en direction, sens et grandeur,*** dont le point d'application se déplace d'une longueur l sur sa propre direction, est :

$$A = F \times l$$

L'unité pratique de travail est le ***kilogrammètre*** (symbole : ***kg.m***)

3. Si la direction du déplacement fait un angle α avec la direction de la force, le travail correspondant :

$$A = F \times l \times \cos \alpha$$

4. Si la trajectoire du point d'application de la force constante en direction sens et grandeur, est quelconque, le travail est égal au produit de l'intensité de cette force par la projection du déplacement sur sa direction.

5. Le travail d'une force constante en grandeur ou d'un couple qui tourne autour d'un axe est donné par l'expression :

$$A = \mathfrak{M} \times \theta$$

$\mathfrak{M}$: moment de la force F par rapport à l'axe ou moment du couple; θ : angle de rotation exprimé en radians.

Exercices.

1. Evaluer en *kilogrammètres* le travail produit par le poids d'un mouton de forge de 52 *kgp* qui tombe verticalement d'une hauteur de 4,25 *m.*

2. Sur la berge d'un canal, un tracteur sur rails remorque une péniche. La force de traction T est de 60 *kgp*, l'angle du câble avec la direction du déplacement est de 30°.

1° Faire le schéma correspondant;

2° Calculer en *kilogrammètres* le travail de la force T lorsque le tracteur avance de 400 *m.*

3. Une poutre métallique de poids P = 200 *kg* et de longueur l = 4,50 *m* repose sur le sol horizontal d'un chantier. A l'aide d'une grue, on la soulève par une de ses extrémités, de manière à la rendre verticale et touchant le sol. Quel travail faut-il dépenser?

4. Un piéton marche sur une distance de 20 *km* en palier. Il fait régulièrement des pas de 0,75 *m* et se soulève à chacun d'eux de 20 *mm.* Evaluer en *kilogrammètres* le travail musculaire qu'il a dépensé, sachant qu'il pèse 70 *kg.*

Même question pour le cas où ce piéton monte 210 marches de 0,15 *m* de hauteur.

5. Un manœuvre exerce sur la poignée d'une manivelle de treuil un effort constant de 10 *kgp* qu'on suppose tangent au déplacement. Calculer le travail accompli après 30 tours de manivelle, sachant que le bras de celle-ci mesure 0,35 *m.*

6. Dans un magasin un ascenseur dont le poids à vide est équilibré par un contre-poids transporte 8 personnes du rez-de-chaussée au 1er étage, 6 personnes du 1er au 3e étage, 2 personnes du 3e au 4e étage.

Quel est, en *kilogrammètres*, le travail mis en jeu, sachant que chaque étage a une hauteur de 4 *m* et qu'une personne pèse en moyenne 70 *kg.*

7. Après 150 courses motrices, le piston d'une machine à vapeur à double effet a produit un travail de 190 000 *kg.m.*

Calculer :

1° le travail par course;

2° la force constante qui produirait le même travail pour un déplacement de 0,60 *m* égal à celui du piston ;

3° Déduire du résultat précédent la pression moyenne, par *centimètre carré*, de la vapeur sur le piston dont le diamètre est 300 *mm.*

Travail de la résultante d'un système de forces. Puissance.

I. TRAVAIL DE LA RÉSULTANTE D'UN SYSTÈME DE FORCES

1. Le travail d'une force peut être considéré comme une grandeur algébrique.

a) Une pierre qu'on soulève est soumise à deux forces :

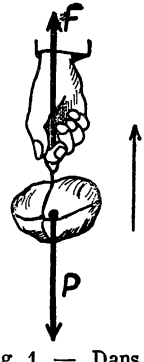


Fig. 1. — Dans le mouvement d'ascension, la force F est *motrice*, la force P est *résistante*.

1° la force F qui provoque le mouvement ascendant (fig. 1);

2° son poids P qui oppose une résistance au mouvement.

La force F est dite ***force motrice*** et son travail ***travail moteur.***

La force P est dite ***force résistante*** et son travail ***travail résistant.***

D'une manière générale *une force est motrice* (fig. 2) *quand cette force, ou sa projection sur le chemin parcouru, est dirigée suivant le sens du déplacement. Elle est résistante dans le cas contraire* (fig. 3).

b) Revenons à la formule $A = Fl \cos \alpha$.

1° Si la force F est motrice :

$$0° \leqslant \alpha < 90°, \quad \cos \alpha > 0, \quad A > 0.$$

2° Si la force F est résistante :

$$90° < \alpha \leqslant 180°, \quad \cos \alpha < 0, \quad A < 0.$$

Le travail moteur est donc *positif* et le travail résistant *négatif.*

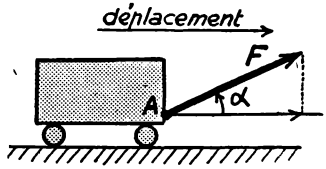


Fig. 2. — La force F produit un *travail moteur*, car sa projection sur la direction du déplacement a le même sens que le déplacement.

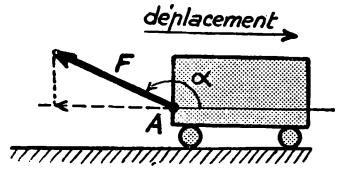


Fig. 3. — La force F produit un *travail résistant*, car sa projection, sur la direction du déplacement, a le sens contraire du déplacement.

Nous observerons toutefois que le travail d'une force n'est pas une *grandeur dirigée.* Il suffit, pour le déterminer, de définir sa grandeur par un nombre positif ou négatif, sans qu'il soit question de direction et de sens.

2. Travail de la résultante de plusieurs forces.

Considérons deux forces F_1 et F_2 constantes en direction, sens et grandeur, appliquées en un point M d'un corps solide. Leur résultante R (fig. 4) est une force qui est aussi constante en direction, sens et grandeur.

Soit MN le déplacement du point M. Les projections des forces F_1, F_2, R, sur la direction du déplacement sont respectivement : f_1, f_2, r. Nous pouvons écrire :

Travail de F_1 de M en N $= f_1 \times MN$.

Travail de F_2 de M en N $= -(f_2 \times MN)$.

La somme algébrique des travaux des composantes est alors égale à :

$f_1 \times MN - f_2 \times MN = MN\ (f_1 - f_2)$.

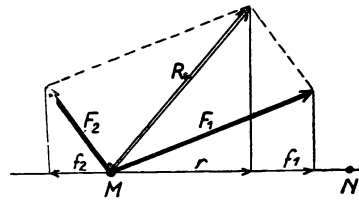


Fig. 4. — Le travail de la force R, quand son point d'application se déplace de M en N, est égal à la *somme algébrique des travaux* des composantes F_1, F_2.

La quantité entre parenthèses représente la somme algébrique des projections des composantes sur la direction du déplacement; elle est égale à la projection de la résultante sur cette direction (voir page 249).

$$MN\ (f_1 - f_2) = MN \times r.$$

Il en résulte que *le travail de la résultante de deux forces concourantes est égal à la somme algébrique des travaux des composantes.*

Remarque, — On étendrait sans peine ce théorème au cas d'un nombre quelconque de forces concourantes.

II. PUISSANCE MÉCANIQUE

3. Notion de puissance.

Un même travail peut être effectué en des temps différents.

Un paysan porte sur ses épaules un sac de blé pesant 50 *kg.* Pour gravir la pente d'un chemin, il met 10 secondes.

Nous pouvons imaginer qu'une fourmi transporte grain par grain tout le contenu du sac en parcourant le même chemin. Elle produit ainsi le même travail, mais dans un temps beaucoup plus long. Nous dirons que *la fourmi a moins de puissance que l'homme.*

D'une manière générale, *une machine est plus puissante qu'une autre lorsqu'elle produit plus de travail pendant le même temps.*

4. Puissance d'une machine.

Certaines machines peuvent ***produire*** *du travail :* les machines à vapeur, les turbines hydrauliques, les moteurs à combustion interne, les moteurs électriques sont dans ce cas : ce sont des *machines motrices.*

D'autres machines ***reçoivent*** *du travail :* c'est le cas pour les machines-outils, les alternateurs, les ventilateurs, les pompes, toutes les machines dites *réceptrices.*

Une machine, motrice ou réceptrice, fonctionne en *régime permanent* lorsque le travail mis en jeu pendant chaque unité de temps est toujours le même.

La puissance P d'une machine a pour mesure le travail constant qu'elle met en jeu pendant une seconde lorsqu'elle fonctionne en régime permanent.

Si l'on désigne par A le travail mis en jeu en t secondes, la puissance est :

$$P = \frac{A}{t}.$$

5. Unités pratiques de puissance.

Les mécaniciens emploient deux unités de puissance :

1° le ***kilogrammètre par seconde*** (*symbole :* ***kg.m/s***).

C'est la puissance d'une machine capable de produire un travail de 1 *kg.m* en une *seconde*;

2° le ***cheval vapeur*** (*symbole :* ***ch***). Par définition 1 *ch* = 75 *kg.m/s.*

Les électriciens utilisent une autre unité : le ***kilowatt*** (*symbole :* ***kW***).

Nous verrons par la suite que : 1 *ch* = 0,736 *kW* d'où 1 *kW* $\simeq$ 1,33 *ch.*

6. Problèmes d'application.

PROBLÈME 1 : *Une machine à vapeur a les caractéristiques suivantes :*

diamètre du piston D = 400 *mm ;* *course :* l = 0,70 *m*
pression moyenne : p = 4 *kg/cm²;* *vitesse de rotation :* N = 120 *tr/mn.*

Calculer sa puissance en chevaux-vapeur sachant que la vapeur agit alternativement sur les deux faces du piston (machine à double effet).

SOLUTION.

La surface du piston : $S = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{3{,}14 \times \overline{40}^2}{4} = 1\,256$ *centimètres carrés.*

La force pressante de la vapeur sur le piston :

$$F = p \times S = 4 \times 1\,256 = 5\,024 \text{ kilogrammes-poids.}$$

Le travail pour une course $A = F \times l = 5\,024 \times 0{,}7 \simeq 3\,517$ *kg.m*

La machine étant à double effet, il y a deux courses motrices pour 1 tour de l'arbre. Le travail par tour est donc $3\,517 \times 2 = 7\,034$ *kg.m*

Or la machine fait à chaque seconde $\frac{120}{60} = 2$ *tr/s*. Il en résulte que le travail produit à chaque seconde, ou puissance, est :

$$7\,034 \times 2 = 14\,068 \text{ } kg.m/s$$

La puissance en chevaux de la machine est donc :

$$P = \frac{14\,068}{75} = \mathbf{187{,}5\ ch}$$

PROBLÈME 2 : *Une pompe élève 40 mètres cubes d'eau par heure à une hauteur de 125 mètres. Calculer en kg.m/s, en ch, en kW, la puissance de la pompe.*

SOLUTION.

Le poids d'eau élevé en 1 heure est de 40 000 *kilogrammes*.
Le travail accompli en 1 heure pour un déplacement de 125 *mètres* est donc

$$A = 40\,000 \times 125 = 5\,000\,000 \text{ } kg.m$$

Nous aurons :

$$\text{Puissance en } kg.m/s = \frac{5\,000\,000}{3\,600} = \mathbf{1\,388\ kg.m/s}$$

$$\text{Puissance en } chevaux = 1\,388 : 75 \simeq \mathbf{18{,}5\ ch}$$

$$\text{Puissance en } kW = 18{,}5 : 1{,}36 = \mathbf{13{,}6\ kW}$$

7. Puissance d'une force dans un mouvement de translation de vitesse constante V.

Soit une force constante F dont le point d'application se déplace sur sa propre direction d'un mouvement uniforme.

Soit l l'espace parcouru en t secondes. Le travail effectué en 1 seconde par la force F est donc :

$$P = \frac{F \times l}{t}.$$

Or le quotient $\frac{l}{t}$ n'est autre que la vitesse V du mouvement uniforme.

Donc : $$\boldsymbol{P = F \times V}.$$

Si F est exprimé en *kgp* et la vitesse en *m/s*, la puissance correspondante s'exprime en ***kg.m/s***. Pour l'obtenir en chevaux il suffit de diviser par 75 le résultat obtenu :

$$P_{ch} = \frac{F \times V}{75}.$$

EXEMPLE NUMÉRIQUE. — *Un train pesant 620 tonnes est remorqué à la vitesse de 100 km/h par une locomotive qui développe une puissance de 2 000 ch. Calculer la force de traction de la locomotive.*

La vitesse du train est de 100 *km/h*, soit en *m/s* :

$$V = \frac{100\,000}{3\,600} = 27{,}7 \text{ } m/s$$

Soit F la force de traction de la locomotive. Sa puissance en ***kg.m/s*** est :

$$2\,000 \times 75 = 150\,000 \text{ } kg.m/s$$

On a donc : $F \times 27{,}7 = 150\,000$
d'où $F = 150\,000 : 27{,}7 \simeq$ ***5 400 kilogrammes-poids***

Cette force est employée à vaincre les diverses résistances qui s'opposent au mouvement. Pratiquement, on la mesure à l'aide d'un crochet dynamométrique placé entre le tender et la rame de wagons.

8. Puissance d'un couple dans un mouvement de rotation uniforme de vitesse angulaire ω.

Nous avons vu que le travail effectué par un couple de moment $\mathcal{M}$, qui tourne d'un angle θ exprimé en radians, est $A = \mathcal{M} \times \theta$ ($\mathcal{M}$ en *m.kg*, A en *kg.m*). Le travail pour un tour (angle 2π radians) est donc égal à $\mathcal{M} \times 2\pi$.

Soit N le nombre de tours effectués en 1 minute ou 60 secondes. Le travail du couple en 1 seconde ou puissance est donc :

$$P = \frac{\mathcal{M} \times 2\pi \times N}{60}.$$

Or $\frac{2\pi \times N}{60}$ n'est autre que la vitesse angulaire ω, d'où

$$\boldsymbol{P = \mathcal{M} \times \omega}.$$

Dans cette formule, P s'exprime en *kg.m/s* si $\mathcal{M}$ est évalué en *m.kg* et ω en *r/s*. Pour obtenir la puissance du couple en chevaux il faut diviser le résultat obtenu par 75 :

$$P_{ch} = \frac{\mathcal{M} \times \omega}{75}.$$

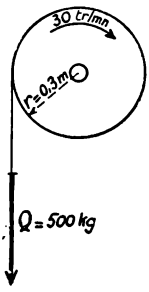


Fig. 5.

1er Exemple numérique. — *Un treuil monte une charge de 500 kilogrammes d'un mouvement uniforme. La vitesse de rotation est de 30 tr/mn. Le tambour a 0,60 m de diamètre. Calculer le couple moteur et la puissance mise en jeu.*

Pour faire monter la charge il faut exercer un couple moteur capable de vaincre le couple résistant dû à la charge (fig. 5). Ce dernier a pour moment :

$$\mathcal{M} = r \times Q = 0{,}3 \times 500 = 150\ m.kg$$

La vitesse angulaire du tambour :

$$\omega = \frac{\pi \times N}{30} = \frac{\pi \times 30}{30} = 3{,}14\ r/s$$

La puissance mise en jeu est donc :

$$P_{ch} = \frac{150 \times 3{,}14}{75} = \boldsymbol{6{,}28\ ch}$$

2e Exemple numérique : *Un moteur électrique a une puissance de 3 chevaux et tourne à raison de 750 tr/mn. Calculer le couple moteur correspondant.*

Soit $\mathcal{M}$ le couple moteur. La vitesse angulaire $\omega = \frac{\pi N}{30} = \frac{\pi \times 750}{30} = 78{,}5\ r/s$

Or : $$P_{ch} = \frac{\mathcal{M} \times \omega}{75} = 3$$

D'où : $\mathcal{M} = \dfrac{3 \times 75}{78{,}5} \simeq 2{,}86\ m.kg$

9. Unités de travail dérivées des unités de puissance.

Nous utiliserons par la suite le ***cheval-heure*** (symbole : ***ch.h***) et le ***kilowatt-heure*** (symbole : ***kW.h***) pour exprimer la quantité de travail produite ou absorbée par une machine en une heure ou 3 600 secondes.

Par suite de ces définitions :

1 *cheval-heure* $= 75 \times 3\,600 = 270\,000\ kg.m$

1 *kilowatt-heure* $= 1{,}36 \times 75 \times 3\,600 = 367\,200\ kg.m$

Résumé.

1. Le travail d'une force peut être considéré comme une grandeur algébrique. Il est dit :

1° *positif* si la projection de la force sur la direction du déplacement a le même sens que ce déplacement;

2° *négatif* dans le cas contraire.

2. Le travail de la résultante d'un système de forces concourantes est égal à la somme algébrique des travaux des composantes.

3. La puissance d'une machine est la quantité de travail qu'elle peut fournir en 1 seconde.

Les unités de puissance employées en pratique sont :

1° le kilogrammètre par seconde (*kg. m/s*).

2° le cheval vapeur (*ch*) : 1 *ch* = 75 *kg. m/s*

3° le kilowatt (*kW*) : 1 *kW* = 1,36 *ch*.

4. La puissance d'une force F dans un mouvement de translation de vitesse V ayant même direction que la force est :

$$\boxed{P = F \times V}$$ **(P en *kg.m/s*, F en *kgp*, V en *m/s*).**

5. Celle d'un couple de moment $\mathcal{M}$ et de vitesse angulaire ω a pour expression :

$$\boxed{P = \mathcal{M} \times \omega}$$ **(P en *kg.m/s*, $\mathcal{M}$ en *m.kg*, ω en *r/s*).**

Exercices.

1. Reprendre les données de l'exercice 7 de la leçon précédente et calculer la puissance de la machine à vapeur en *ch*, puis en *kW* sachant que la vitesse de rotation est de 60 *tr/mn*.

2. La différence de niveau entre un barrage et un groupe de turbines hydrauliques est de 240 *mètres*. Le débit d'eau est de 6,9 *mètres cubes* par seconde. Calculer en *ch*, puis en *kW*, la puissance disponible à l'entrée des turbines.

3. Le téléférique du mont Revard (Aix-les-Bains — Lac du Bourget) élève en 6 *minutes*, à une hauteur de 848 *m*, une cabine pouvant contenir 40 voyageurs et leurs bagages dont le poids total est évalué à 3 100 *kg*. Le poids d'une cabine est de 1 750 *kg*

Calculer en chevaux la puissance mécanique mise en jeu.

(Le câble qui soutient la cabine n'est attaché qu'aux deux extrémités et forme ainsi un arc dont la corde mesure 1 576 *m* et dont la projection sur un plan horizontal est 1 328 *m*).

4. Une automobile roulant à la vitesse de 80 *km/h* en palier, développe une puissance de 20 *ch*

Calculer l'intensité de la force constante qui lui donnerait la même vitesse si le moteur était arrêté.

Expliquer pourquoi le mouvement demeure uniforme.

5. Une grue est équipée avec un moteur électrique de 10 *ch*. Avec quelle vitesse peut-on monter verticalement une charge de 3 *tonnes*, sachant que les résistances diverses dues aux frottements absorbent 3/10 de la puissance ?

6. Un moteur d'avion, 12 cylindres a une puissance de 450 *ch* et tourne à la vitesse de 4 500 *tr/mn*.

1° Calculer le couple moteur correspondant.

2° Montrer que la puissance est donnée par l'expression .

$$P_{ch} = n \times \frac{p_m \times s \times v_m}{75 \times 4}$$

dans laquelle :

n = nombre de cylindres,

p_m = pression moyenne par cm^2 des gaz de l'explosion,

s = surface d'un piston en cm^2

v_m = vitesse moyenne d'un piston en m/s.

On rappelle que dans un moteur à 4 temps, 1 seule course du piston sur 4 est motrice.

3° Calculer p_m sachant que v_m = 13,5 m/s et que le diamètre de l'alésage est de 96,75 *mm*.

7. On tourne une pièce dans les conditions suivantes :

Profondeur de passe : 5 *mm*. — *Avance par tour* : 1 *mm*. — *Vitesse de coupe* : 20 *m/mn*.

On admet que l'arrachement du copeau nécessite une force tangentielle de 100 *kgp par* mm^2 de sa section.

Sachant que ce travail de chariotage absorbe les 6/10 de la puissance du moteur qui entraîne le tour, calculer cette puissance.

Systèmes d'unités.

1. Mesure des grandeurs : systèmes d'unités.

Nous mesurons une grandeur quelconque en la comparant à une autre grandeur de même espèce appelée *unité*. Ainsi, nous mesurons la longueur de la salle en cherchant combien de fois elle contient une longueur prise pour unité, le mètre par exemple.

On pourrait évidemment, pour chaque espèce de grandeur, prendre une unité quelconque, une *unité arbitraire, sans tenir compte des relations que la géométrie, la mécanique et la physique établissent entre les différentes grandeurs.*

Mais il est beaucoup plus avantageux, afin de simplifier les calculs, de choisir les unités en tenant compte de ces relations : c'est ainsi qu'ayant pris le mètre pour unité de longueur, on adopte toujours, pour unité de surface, la surface du carré qui a un mètre de côté (mètre carré); pour unité de volume, le volume du cube qui a un mètre d'arête (mètre cube), etc.

Un ensemble d'unités choisies en tenant compte des relations établies en géométrie, en mécanique, en physique constitue un SYSTÈME D'UNITÉS.

2. Unités fondamentales et unités dérivées.

Actuellement, nous employons en France plusieurs systèmes d'unités. Dans chacun d'eux, *trois unités sont choisies arbitrairement,* sans tenir compte des autres : on les appelle *unités fondamentales;* ce sont des *raisons de commodité* seules qui ont dicté leur choix.

Toutes les autres unités ont des grandeurs qui dépendent de celles des unités fondamentales : elles sont appelées *unités dérivées.*

I. — SYSTÈME CGS

3. Unités fondamentales du système CGS.

Ce sont :

1° l'unité de longueur, qui est le ***centimètre*** (initiale C)
2° — masse, — ***gramme-masse*** (— G)
3° — temps, — ***seconde*** (— S).

Le ***centimètre*** (symbole *cm*) est la centième partie du mètre. Le *mètre* (symbole *m*) est la distance, à la température de 0°, de deux traits

parallèles gravés sur une règle en platine iridié, appelée ***mètre-étalon***,

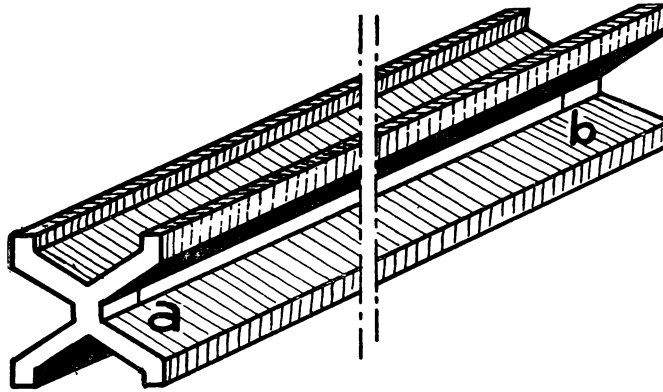


Fig. 1. — Voici le **mètre-étalon** dont la section est représentée ici en vraie grandeur. La distance comprise entre les traits finement gravés *a* et *b* définit le mètre.

déposée au bureau international des poids et mesures, à Sèvres (fig. 1). La longueur du mètre est très approximativement égale à la dix-millionième partie du quart d'un méridien terrestre.

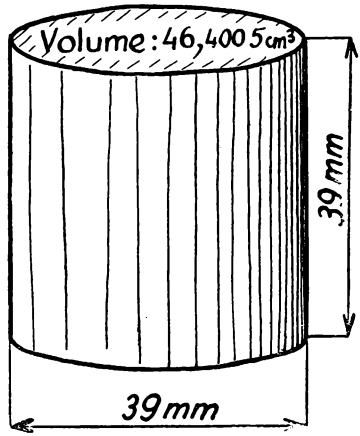


Fig. 2. — Voici en vraie grandeur le **kilogramme-étalon** déposé au bureau international des poids et mesures à Sèvres.

Le ***gramme*** (symbole *g*) est la millième partie du kilogramme. Le kilogramme (symbole *kg*) est la masse d'un cylindre en platine iridié, — appelé ***kilogramme-étalon***, — déposée au bureau international des poids et mesures, à Sèvres (fig. 2).

Le gramme est pratiquement égal à la masse de 1 centimètre cube d'eau à la température de + 4° centésimaux (température du maximum de densité de l'eau).

La ***seconde*** (symbole *s*) est la soixantième partie de la *minute;* la minute est la soixantième partie de l'*heure*, et l'heure est la vingt-quatrième partie du *jour solaire moyen.*

4. Unités dérivées du système CGS.

1° Unité de vitesse linéaire. — *Sa définition résulte de la formule* $v = \frac{e}{t}$ *adoptée pour calculer la vitesse d'un mouvement uniforme.* En

effet, si un mobile parcourt d'un mouvement uniforme 1 *centimètre* ($e = 1$) pendant 1 *seconde* ($t = 1$), sa vitesse est, en vertu de la formule précédente $v = \frac{e}{t}$:

$$v = \frac{1}{1} = 1;$$

elle est égale à l'unité de vitesse.

L'unité CGS de vitesse est la vitesse d'un mobile animé d'un mouvement uniforme qui parcourt 1 *centimètre en* 1 *seconde* [1].

Cette unité s'appelle *centimètre par seconde;* son symbole est *cm/s.*

2° *Unité de vitesse angulaire.* — Sa formule résulte de la formule $\omega = \frac{\alpha}{t}$, adoptée pour calculer la vitesse angulaire d'un mouvement de rotation uniforme, dans laquelle ω désigne la vitesse angulaire du mobile en rotation et α l'angle en radians dont il tourne pendant t secondes.

Si ce mobile tourne de 1 *radian* ($\alpha = 1$) pendant 1 seconde ($t = 1$), en vertu de la formule adoptée, sa vitesse angulaire est :

$$\omega = \frac{\alpha}{t} = \frac{1}{1} = 1;$$

elle est mesurée par le nombre 1 ; c'est dire qu'elle est égale à l'unité.

L'unité CGS de vitesse angulaire est la vitesse angulaire d'un mobile animé d'un mouvement de rotation uniforme qui tourne de 1 *radian pendant* 1 *seconde.*

Cette unité a reçu le nom de *radian par seconde.* Son symbole est : *r/s.*

3° *Unité d'accélération.* — Sa définition résulte de la formule $v = \gamma t$ ou $\gamma = \frac{v}{t}$ qui donne l'accélération d'un mobile animé d'un mouvement uniformément accéléré. En effet, si au bout de 1 *seconde* la vitesse du mobile partant du repos devient égale à 1 *centimètre par seconde,* l'accélération du mobile est mesurée par le nombre :

$$\gamma = \frac{1}{1} = 1.$$

Elle est donc égale à l'unité d'accélération.

L'unité CGS d'accélération est l'accélération d'un mobile animé d'un mouvement uniformément accéléré dont la vitesse s'accroît de 1 *centimètre par seconde pendant chaque seconde.*

Cette unité, symbole : *cm s s,* s'appelle : centimètre par seconde par seconde.

4° *Unité de force.* — Sa définition résulte de la formule fondamentale de mécanique : $f = m\gamma$. En effet, si une force a une grandeur telle

1. On peut naturellement utiliser les *multiples* et les *sous-multiples* des unités *principales* que nous allons définir. Toutefois, dans les applications numériques, ce sont les unités principales telles que nous les définissons qui doivent être seules utilisées.

qu'en agissant sur une masse égale à l'unité (1 *gramme-masse*), elle lui communique une accélération égale à l'unité. (1 *cm s s*), cette force est mesurée par le nombre :

$$f = 1 \times 1 = 1.$$

Elle est donc égale à l'unité de force.

L'unité CGS de force est la force qui agissant sur une masse de 1 *gramme lui communique une accélération de* 1 *centimètre par seconde par seconde.*

Cette unité a reçu le nom de ***dyne.***

Cette force est très petite : elle vaut en effet 1/981 gramme-poids (à peu près 1 milligramme-poids).

5° ***Unité de travail.*** — Sa formule de définition est :

$$A = F \times l$$

adoptée pour calculer le travail d'une force constante qui déplace son point d'application dans sa direction (41e Leçon, § 3).

Si une force $F = 1$ *dyne* déplace son point d'application d'une longueur $l = 1$ *centimètre*, dans sa propre direction, le travail produit a pour mesure :

$$A = 1 \times 1 = 1.$$

Il est mesuré par le nombre 1, donc égale à l'unité.

L'unité CGS de travail est le travail d'une force de 1 *dyne qui déplace son point d'application de* 1 *centimètre dans sa direction.*

Cette unité a reçu le nom d'***erg*** (symbole : *erg*).

Elle est très petite. L'unité pratique CGS de travail est le ***joule*** (symbole *J*), qui vaut 10 *millions d'ergs.*

1 joule = 10 000 000 ergs = 10^7 ergs.

6° ***Unité de puissance.*** — Sa définition résulte de la formule : $P = \frac{A}{t}$ adoptée pour calculer la puissance d'une machine en régime permanent (42e Leçon, § 4).

En effet, si une machine met en jeu un travail de 1 *erg* ($A = 1$) en 1 *seconde* ($t = 1$), sa puissance a pour mesure :

$$P = \frac{1}{1} = 1.$$

Elle est mesurée par le nombre 1, donc égale à l'unité.

L'unité CGS de puissance est la puissance d'une machine qui met en jeu un travail de 1 *erg en* 1 *seconde.*

Cette unité a pour symbole *erg/s* et s'appelle ***erg par seconde.*** Elle est très faible, L'unité pratique CGS de puissance correspond à l'unité pratique de travail, c'est-à-dire à une puissance de 1 *joule par seconde;* elle est appelée ***Watt*** (symbole W).

1 Watt = 1 joule par seconde = 10^7 ergs par seconde.

7° ***Unité de pression.*** Sa formule de définition est :

$$p = \frac{f}{s}$$

adoptée pour calculer la pression exercée par une force pressante f uniformément répartie sur une surface s.

Si $f = 1$ *dyne* et $s = 1$ cm^2, la pression a pour mesure

$$p = \frac{1}{1} = 1.$$

Elle est égale à l'unité.

L'unité CGS de pression est la pression exercée par une force pressante de 1 dyne sur une surface de 1 centimètre carré.

Elle a reçu le nom de ***barye*** (pas de symbole).

II. SYSTÈME MTS

C'est un système d'unités rendu obligatoire en France par la loi du 2 avril 1919.

5. Unités fondamentales du système MTS.

Ce sont :

1° l'unité de longueur, qui est le ***mètre*** (initiale M)
2° — masse, — la ***tonne*** (— T)
3° — temps, — la ***seconde*** (— S).

La tonne vaut 1 000 kilogrammes-masse ou 10^6 grammes-masse.

6. Unités dérivées MTS.

Ces unités sont déduites des *mêmes formules* que les unités dérivées CGS. Il nous suffit de donner leurs définitions.

1° ***Unité de vitesse linéaire.*** — *L'unité MTS de vitesse est la vitesse d'un mobile animé d'un mouvement uniforme qui parcourt 1 mètre par seconde.* Cette unité (symbole *m/s*) s'appelle *mètre par seconde.*

2° ***Unité de vitesse angulaire.*** — L'unité d'angle MTS est le *radian* et l'unité de temps la *seconde :* ce sont donc les mêmes unités que celles du système CGS. La vitesse angulaire est par suite la même qu'en CGS : soit le *radian par seconde* (symbole *r/s*).

3° ***Unité d'accélération.*** — *L'unité MTS d'accélération est l'accélération d'un mobile animé d'un mouvement uniformément accéléré dont la vitesse s'accroît de 1 mètre par seconde pendant chaque seconde.* Cette unité (symbole *m/s/s* ou m/s^2) s'appelle : *mètre par seconde par seconde.*

Exemple : $g = 9{,}81$ m/s/s $= 9{,}81$ m/s^2.

4° ***Unité de force.*** — *L'unité de force MTS est la force qui agissant sur une masse de 1 tonne lui communique une accélération de 1 mètre par*

seconde par seconde. Cette unité (symbole *sn*) a reçu le nom de ***sthène*** (d'un mot grec : *sthénos*, force, que l'on retrouve dans *neurasthénie :* littéralement, manque de force du système nerveux).

5° ***Unité de travail.*** — *L'unité de travail MTS est le travail d'une force de* 1 *sthène qui déplace son point d'application de* 1 *mètre dans sa propre direction.*

Nous démontrerons que cette unité vaut 1 000 joules ou 1 *kilojoule :* donc l'unité de travail MTS est le *kilojoule* (symbole *kJ*).

1 unité de travail MTS = 1 kilojoule.

6° ***Unité de puissance.*** — *L'unité MTS de puissance est la puissance d'une machine qui met en jeu* 1 *kilojoule par seconde.*

Cette unité s'appelle *kilowatt* (symbole *kW*).

1 unité de puissance MTS = 1 kilowatt.

7° ***Unité de pression.*** — *L'unité MTS de pression est la pression exercée par une force pressante de* 1 *sthène uniformément répartie sur une surface de* 1 *mètre carré.*

Cette unité s'appelle *pièze* (symbole : *pz*). On utilise fréquemment comme unité pratique de pression l'*hectopièze* (symbole : *hpz*).

III. SYSTEME MKS

C'est le système des mécaniciens.

7. Unités fondamentales du système MKS.

Ce sont :

1° *l'unité de longueur :* qui est le ***mètre*** (initiale M);
2° — *force :* — le ***kilogramme-poids*** (initiale K).
3° — *temps :* — la ***seconde*** (initiale S).

Le *kilogramme-poids est le poids,* à ***Paris,*** *du kilogramme-étalon, c'est-à-dire du cylindre de platine iridié déposé au Bureau international des Poids et Mesures à Sèvres.*

REMARQUE. — Le système MKS diffère surtout des deux systèmes précédents en ce que l'unité de masse n'est plus une unité fondamentale : c'est l'unité de force qui la remplace comme une unité fondamentale.

8. Unités dérivées du système MKS.

1° ***Unité de vitesse.*** — C'est le mètre par seconde (*m/s*).

2° ***Unité d'accélération.*** — C'est le mètre par seconde par seconde (*m/s/s* ou m/s^2).

3° ***Unité de masse.*** — Cette définition résulte de la formule $f = m\gamma$, que l'on peut écrire : $m = \frac{f}{\gamma}$ *Si la masse d'un corps est telle que, sous l'action d'une force égale à l'unité MKS de force* (c'est-à-dire égale au kilogramme-poids), *elle prenne une accélération égale à l'unité MKS d'accélération* (1 m s s), la masse de ce mobile, en vertu de la formule $m = \frac{f}{\gamma}$, est mesurée par le nombre $m = \frac{1}{1} = 1$; cette masse est *l'unité MKS* de masse.

Nous savons qu'une force de 1 *kilogramme-poids* communique à la masse du kilogramme étalon une accélération de 9,81 *m/s/s*. A une masse 9,81 fois plus grande, *la même force* de 1 *kgp* communiquerait une accélération 9,81 fois plus petite, soit 1 *m/s/s*. Nous pouvons donc dire que l'unité de masse MKS vaut 9,81 kilogrammes-masse.

1 unité de masse MKS = 9,81 kilogramme-masse.

4° ***Unité de travail.*** — *L'unité MKS de travail est le travail d'une force de* 1 *kilogramme-poids dont le point d'application se déplace de* 1 *mètre dans sa propre direction.*

Cette unité a reçu le nom de *kilogrammètre* (symbole : *kg.m* ou *kgm*).

5° ***Unité de puissance.*** — *L'unité MKS de puissance est la puissance d'une machine qui met en jeu un travail de* 1 *kilogrammètre en* 1 *seconde.*

Cette unité a reçu le nom de *kilogrammètre par seconde* (symbole : *kg.m/s*).

L'unité pratique MKS de puissance est le *cheval vapeur* (symbole : *ch*) qui vaut 75 kilogrammètres par seconde.

1 ch = 75 kg.m/s

6° ***Unité de pression.*** — *L'unité de pression est le kilogramme-poids par mètre carré* (symbole kgp/m²).

L'unité pratique de pression est le kilogramme-poids par centimètre carré (symbole : kgp cm²).

IV. RELATIONS ENTRE LES UNITÉS DES DIVERS SYSTÈMES

1° ***Unités de vitesse linéaire.***

1 *m/s* = 100 *cm/s.*

2° ***Unités d'accélération.***

1 *m/s/s* = 100 *cm/s/s.*

3° ***Unités de masse.***

1 *tonne* = 1 000 000 *grammes* = 10^6 *grammes.*

1 *unité MKS de masse* = 9,81 *kilogrammes* = 9 810 *grammes.*

4° *Unités de force :* dyne, sthène, kilogramme-poids.

1 *sthène* = 100 000 000 *dynes* = 10^8 *dynes.*
1 *kilogramme-poids* = 981 000 *dynes.*
1 *sthène* = **102** ***kilogramme-poids.***

En effet :

1 *sthène* communique à 1 *tonne* (10^6 *g*) une accélérationde 1 *m/s/s* (10^2 cm/s/s).
1 *dyne* — 1 *gramme* (1 g) — 1 *cm/s/s.*
Donc : 1 sthène = $10^6 \times 10^2 = 10^8$ dynes.

De même :

1 *kilogramme-poids* communique : à 1 *unité de masse* MKS (9 810 *g*) une accélération de 1 *m/s/s* (10^2 cm/s/s).
1 *dyne* communique : à *gramme-masse* (1 g) une accélération de 1 *cm/s/s.*
Donc 1 kilogramme-poids = $9810 \times 100 = 981.000$ dynes.

Puisque :

1 sthène = 10^8 dynes = 100 000 000 dynes.
1 kgp = 981 000 dynes.

il en résulte que : $1 \text{ sthène} = \dfrac{100\,000\,000}{981\,000} = 102 \text{ kgp.}$

5° *Unités de travail :* erg, kilojoule, kilogrammètre.

1 *unité de travail MTS* = 1 *kilojoule* = 1 000 *joules* = 10^{10} *ergs.*
1 *kilogrammètre* = 9,81 *joules* = $9{,}81 \times 10^7$ *ergs.*

En effet :

1 unité de travail MTS est le travail de : 1 sthène (10^8 dynes) qui se déplace de 1 mètre (10^2 cm).
1 erg, unité de travail CGS, est le travail de : 1 dyne qui se déplace de 1 cm.
Donc : 1 unité de travail MTS = $10^8 \times 10^2$ ergs = 10^{10} ergs = 10^3 joule.

De même :

1 kilogrammètre est le travail de : 1 kilogramme-poids (981 000 dynes) qui se déplace de 1 mètre (10^2 cm).
1 erg est le travail de : 1 dyne qui se déplace de 1 cm.
Donc : 1 kilogrammètre = $981\,000 \times 100 = 98\,100\,000$ ergs = 9,81 joules.

6° *Unités de puissance.*

1 *unité de puissance MTS* = 1 *kilowatt.*
1 *kilogrammètre par seconde* = 9,81 *watts.*
1 *cheval-vapeur* = 736 *watts.*

En effet :

1 unité de puissance MTS représente un travail de 1 kilojoule par seconde.
1 watt représente un travail de 1 joule par seconde.
Donc : 1 unité de puissance MTS = 1 kilowatt.

Puisque : 1 kilogrammètre vaut 9,81 joules,
1 kilogrammètre par seconde vaut 9,81 joules par seconde ou 9,81 watts.

Enfin : 1 cheval-vapeur = 75 kilogrammètres par seconde.
1 kilogrammètre par seconde = 9,81 watts.
Donc : 1 cheval-vapeur = $9{,}81 \times 75 = 736$ watts.

7° ***Unités de pression :*** barye, pièze, kgp/cm².

1 *pièze* = 10 000 *baryes* = 10^4 *baryes*.
1 *kgp/cm²* = 981 000 *baryes*.
1 *kgp/cm²* = 98,1 *pièze* ≃ 1 *hectopièze*.

En effet :

1 *barye* est la pression exercée par une force de 1 dyne sur une surface de 1 cm².
1 *pièze* est la pression exercée par une force de 1 sthène (10^8 dynes) sur 1 mètre carré (100 cm²).

Donc, 1 pièze correspond à une force pressante de $10^8 : 10^4 = 10^4$ dynes sur chaque centimètre carré, soit 10^4 baryes.

De même :

1 kilogramme-poids par centimètre carré correspond à une force de 981 000 dynes par centimètre carré, soit 981 000 baryes.

Exercice.

Un corps pèse 50 kilogrammes. Quel est le nombre x qui mesure sa masse?

Solution. — Le nombre qui mesure sa masse dépend du système d'unités que l'on adopte.

1° *Système CGS.* — Dire que le corps pèse 50 kilogrammes, c'est dire que sa masse est 50 kilogrammes-masse, soit 50 000 grammes.

$$x = 50\ 000 \text{ CGS}.$$

2° *Système MTS.* — L'unité de masse est la tonne qui vaut 10^6 grammes. Donc :

$$x = \frac{50\ 000}{10^6} = 0{,}05 \text{ MTS}.$$

3° *Système MKS.* — L'unité de masse vaut 9,81 kilogrammes-masse.

Donc :
$$x = \frac{5}{9{,}81} = 5{,}10 \text{ MKS}.$$

Cet exercice montre d'une façon frappante que, dans les exercices numériques, il faut faire bien attention au système d'unités que l'on emploie.

REMARQUE TRÈS IMPORTANTE. — ***Il est indispensable que toutes les grandeurs soient mesurées avec des unités principales appartenant au même système :*** ce n'est qu'à cette condition que les formules de géométrie, de mécanique et de physique, telles que :

$$v = \gamma t, \qquad e = \frac{1}{2}\gamma t^2, \qquad f = m\gamma, \text{ etc.}$$

sont numériquement exactes.

Les Élèves commettent fréquemment des erreurs en ne se conformant pas à cette règle. Donnons un exemple simple.

Quelle est la force qui communique à un corps pesant 5 kilogrammes une accélération de 2 mètres par seconde par seconde?

L'Élève qui ne réfléchit pas dit : « Appliquons la formule $f = m\gamma$; ici $m = 5$ *kg*, $\gamma = 2$ *m/s/s*; donc $f = 5 \times 2 = 10$ *kgp* ».

Il a fait une erreur parce qu'il a pris pour unité d'accélération le *m/s/s*, unité d'accélération du système MTS et du système MKS, et pour unité de masse le *kg* qui n'est l'unité de masse ni du système MTS, ni du système MKS.

IL FAUT INDIQUER NETTEMENT, AU DÉBUT DE CHAQUE PROBLÈME, QUEL SYSTÈME D'UNITÉS ON VA EMPLOYER. — Par exemple, dans le cas précédent, il faut dire :

Employons le SYSTÈME CGS : $m = 5\,000\ g$; $\gamma = 200\ cm/s/s$.

Donc : $f = 5\,000 \times 200 = 1\,000\,00$) *dynes* = 1 *mégadyne* ;

ou bien : employons le SYSTÈME MTS : $m = 0{,}005t$; $\gamma = 2\ m/s/s$.

Donc : $f = 0{,}005 \times 2 = 0{,}01$ *sthène*.

ou bien : employons le SYSTÈME MKS : $m = \frac{5}{9{,}81}$ *unités de masse MKS* ; $\gamma = 2m/s/s$.

Donc : $f = \frac{5}{9{,}81} \times 2 = \frac{10}{9{,}81} = 1{,}02\ kgp$.

(On peut vérifier que 1 *mégadyne* = 0,01 *sthène* = 1,02 *kgp*.)

REMARQUE. — Les mécaniciens utilisent surtout le système MKS. Si l'on utilise ce système, on évite toute erreur dans l'emploi des formules en remplaçant m par $\frac{p}{g}$ quand on passe aux applications numériques.

Exercices.

1. Une automobile a une vitesse de 80 *kilomètres par heure*. Exprimer cette vitesse en *m/h*, en *m/mn*, en *m/s*, en *cm/s*, en *mm/s*.

2. Combien le sthène vaut-il de *kilogrammes-poids?*

Montrer que 1 kilogramme-poids vaut presque 1 centisthène (1 kgp = 0,98 csn).

3. Un corps pèse 25 *kilogrammes*. Quel est le nombre qui mesure sa ***masse?***

1° Dans le système CGS? — 2° Dans le système MTS? — 3° Dans le système MKS?

4. Un corps pèse 25 *kilogrammes*. Quel est le nombre qui mesure son ***poids?***

1° Dans le système CGS? — 2° Dans le système MTS? — 3° Dans le système MKS?

Evaluer ce poids : en mégadynes, en centisthènes.

5. Quel est le poids, évalué en unités de chacun des trois systèmes, d'une colonne de mercure, à la température 0°, la section de cette colonne étant de 1 cm^2 et sa hauteur 76 cm?

Densité du mercure à 0° : 13,6 g/cm^3.

6. La pression atmosphérique normale est celle qui est exercée à Paris par une colonne de mercure à 0° de 76 centimètres de hauteur.

Quelle est la valeur de cette pression en baryes, en pièzes, en hectopièzes, en kilogrammes-poids par mètre carré?

7. Quelle serait la définition de l'unité de surface si l'on adoptait, pour mesurer l'aire d'un cercle, la formule $S = R^2$?

Par quelle formule serait donnée l'aire d'un rectangle de côtés a et b?

Résumé.

GRANDEURS		SYSTÈME CGS		SYSTÈME MTS		SYSTÈME MKS.	
		UNITÉS absolues	UNITÉS pratiques	UNITÉS absolues	VALEURS en CGS.	UNITÉS ABSOLUES	VALEURS EN CGS.
UNITÉS fondamentales	Longueur.	***Centimètre*** (cm)	Multiples et sous-multiples	***Mètre*** (m)	1 m = 100 cm	***Longueur :*** Mètre (m)	L'***unité de force*** est une unité fondamentale dans le système MKS. L'***unité de masse*** est une unité dérivée.
	Masse.	***Gramme*** (g)	»	***Tonne*** (t)	1 t = 10^6 g	***Force :*** Kilogramme poids (kgp).	
	Temps.	***Seconde*** (s)	»	***Seconde*** (s)		***Temps :*** Seconde (s).	
UNITÉS DÉRIVÉES cinématiques	Vitesse.	Centimètre par seconde (cm/s)	»	Mètre par seconde (m/s)	1 m/s = 10^2 cm/s	Vitesse : Mètre par seconde (m/s).	
	Accélération.	Centimètre par seconde par seconde (cm/s/s)	»	Mètre par seconde par seconde (m/s/s)	1 m/s/s = 10^2 cm/s/s	Accélération : Mètre par seconde par seconde (m/s/s).	
UNITÉS DÉRIVÉES mécaniques	Force.	Dyne	Mégadyne = 10^6 dynes.	Sthène (sn)	1 sn = 10^8 dynes.	Masse : Unité MKS de masse.	1 MKS = 9810 g
	Travail.	Erg	Joule = 10^7 ergs.	Kilojoule (kJ)	1 kJ = 10^3 J	Travail : Kilogrammètre (kg.m).	1 kg. m = 9,81 J
	Puissance.	Erg par seconde	Watt = 1 joule par seconde.	Kilowatt kW)	1 kW = 10^3 W	Puissance : Kilogrammètre par seconde (kg. m/s).	1 kg.m/s = 9,81 W
	Pression.	Barye	Mégabarye = 10^6 baryes.	Pièze (pz).	1 pz = 10^4 baryes.	Pression : Kilogramme poids par m^2. (kgp/m^2).	1 $\frac{kgp}{m^2}$ = 981000 baryes.

L'unité pratique de puissance MKS est le cheval-vapeur (ch) qui vaut, ***par définition***, 75 kg.m/s, et par suite ***736 watts.***

Énergie cinétique d'un point matériel et d'un corps solide.

1. Un corps solide en mouvement dont la vitesse diminue peut produire du travail.

EXPÉRIENCE. — 1° Mesurons la résistance à l'enfoncement d'un clou dans une planchette à l'aide du dispositif à levier de la figure 1.

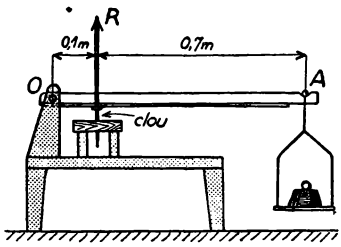


Fig. 1. — Expliquez comment on peut procéder pour mesurer la résistance à l'enfoncement d'un clou dans une planchette.

Soit $R = 42$ *kgp*

Pour que le clou pénètre, il faut le pousser avec une force de 42 *kgp* sur un certain parcours, c'est-à-dire *produire du travail.*

2° Prenons un marteau de poids $P = 1$ *kgp* et posons-le sur la tête du clou : celui-ci demeure immobile, car P est inférieur à R.

3° Frappons maintenant sur le clou comme on le fait habituellement : il s'enfonce.

CONCLUSION. — *Un marteau en mouvement a la propriété de produire du travail grâce à sa vitesse.* Pendant le choc, celle-ci s'annule et le travail se produit.

D'autres manifestations du même genre peuvent être observées :

Un mouton d'estampage est capable, au bas de sa chute, de produire le travail nécessaire à la déformation du métal.

Une masse d'eau en mouvement peut faire tourner des turbines grâce à sa vitesse acquise lors de sa chute.

Pour mesurer la résilience des métaux, on casse des échantillons du métal à étudier à l'aide d'un *mouton de Charpy* (fig. 2). Une masse mobile à la façon d'un pendule est abandonnée à elle-même

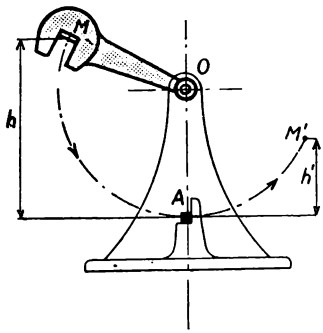


Fig. 2. — Schéma du *mouton de Charpy.* La masse M tombe d'une hauteur *h.* Après rupture de l'éprouvette placée en A elle remonte à la hauteur *h'*.

à une certaine hauteur du sol. Arrivée en A, sa vitesse a une valeur v. Cette masse rencontre alors l'éprouvette, la brise et remonte de l'autre côté de OA, mais pendant la rupture sa vitesse a diminué. A cette diminution correspond la production d'un travail : celui qui est nécessaire à la rupture de l'éprouvette.

2. Définition de l'énergie cinétique d'un corps solide.

Les exemples ci-dessus nous montrent qu'un corps en mouvement peut produire du travail lorsque sa vitesse diminue.

On appelle énergie cinétique d'un corps en mouvement la quantité de travail qu'il produirait si sa vitesse venait à s'annuler.

L'énergie cinétique, comme le travail mécanique, se mesure pratiquement en kilogrammètres.

3. Énergie cinétique du point matériel.

L'effet d'un coup de marteau est d'autant plus efficace que sa masse est plus grande et la vitesse elle-même plus grande.

L'énergie cinétique d'un corps en mouvement dépend donc à la fois de sa masse et de sa vitesse.

Théorème. — ***L'énergie cinétique d'un point matériel animé d'une vitesse v est égale au demi-produit de sa masse m par le carré de sa vitesse.***

$$W = \frac{1}{2} mv^2$$

(W : symbole du mot énergie).

Vérifions ce théorème dans un cas particulier.

Soit un solide de masse m. Pour l'élever verticalement à une hauteur h, on peut opérer de deux façons :

1° *le tirer vers le haut* avec une force égale à son poids mg (ou mieux supérieure à ce poids d'une quantité d'ailleurs aussi petite qu'on veut, donc négligeable). Cette force produit un travail :

$$A = f \times h = mgh$$

2° *le lancer de bas en haut verticalement.* Pour qu'il arrive juste à la hauteur h, il faut le lancer avec une vitesse v, telle que :

$$h = \frac{v^2}{2g}.$$

Le corps a, au départ, une certaine énergie cinétique. Quand il a terminé son ascension sa vitesse est nulle, mais il a produit lui-même le travail mgh nécessaire pour l'élever à la hauteur atteinte, c'est-à-dire un travail égal à :

$$mg \times \frac{v^2}{2g} = \frac{mv^2}{2}.$$

Cette expression mesurant le travail que fournit le corps de masse m de vitesse v, pendant que sa vitesse diminue et finalement s'annule, mesure donc l'énergie cinétique qu'il possède lorsque sa vitesse est v.

EXEMPLE NUMÉRIQUE. — *Calculer l'énergie cinétique d'une balle de fusil pesant 8 grammes animée à sa sortie de l'arme d'une vitesse de 700 m/s.*

Assimilons la balle à un point matériel. Son énergie cinétique à la sortie de l'arme, $W = \frac{1}{2} mv^2$.

Dans le système pratique (MKS) :

$$m = \frac{0{,}008}{9{,}81} \text{ unités de masse}$$

$$v = 700 \text{ m/s} \quad v^2 = 490\,000.$$

Par suite : $W = \frac{1}{2} \times \frac{0{,}008}{9{,}81} \times 490\,000 \simeq \boldsymbol{200 \text{ kg.m}}$

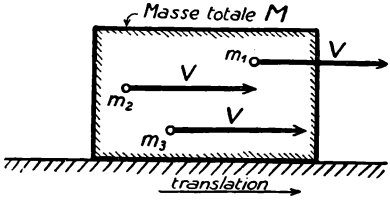


Fig. 3. — L'*énergie cinétique* d'un corps en translation est : $W = \frac{1}{2} MV^2$.

4. Énergie cinétique d'un corps solide animé d'un mouvement de translation.

Soit M la masse d'un corps solide animé d'un mouvement de translation. A un instant t quelconque, tous ses points matériels ont même vitesse V (fig. 3).

L'énergie cinétique du corps solide est égale à la somme des énergies cinétiques de ses différents points, soit :

$$W = \frac{1}{2} m_1 V^2 + \frac{1}{2} m_2 V^2 + \frac{1}{2} m_3 V^2 + \ldots\ldots$$

$$= \frac{1}{2} V^2 (m_1 + m_2 + m_3 + \ldots\ldots)$$

La quantité entre parenthèses, somme des masses des éléments du corps solide, est égale à M, donc :

$$\boldsymbol{W = \frac{1}{2} MV^2}$$

L'énergie cinétique d'un corps animé d'un mouvement de translation est égale au demi-produit de sa masse par le carré de la vitesse de translation.

EXEMPLE NUMÉRIQUE. — *Un plateau de raboteuse pèse 400 kg. Calculer son énergie cinétique à l'instant où il est animé d'une vitesse de translation de 2,5 m/s.*

La masse du plateau $M = \frac{P}{g} = \frac{400}{9.81}$ unités de masse MKS

La vitesse $V = 2{,}5$ m s $V^2 = 6{,}25$.

D'où : $$W = \frac{1}{2} \times \frac{400}{9{,}81} \times 6{,}25 \simeq \textbf{\textit{127,5 kg.m}}$$

5. Énergie cinétique d'un corps solide animé d'un mouvement de rotation.

Considérons un volant mobile autour d'un axe $x'x$ (fig. 4).

Une particule de masse m_1, située à une distance r_1 de l'axe, est animée d'une certaine vitesse linéaire v_1. Son énergie cinétique est donc :

$$W_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2.$$

Soit ω la vitesse angulaire du volant. La vitesse $v_1 = \omega \times r_1$, et par suite

$$W_1 = \frac{1}{2} m_1 \omega^2 r_1^2.$$

De même l'énergie cinétique d'une masse m_2, située à une distance r_2 de l'axe de rotation, a pour valeur :

$$W_2 = \frac{1}{2} m_2 \omega^2 r_2^2.$$

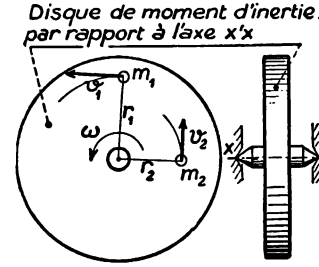


Fig. 4. — *L'énergie cinétique* d'un corps en rotation est : $W = \frac{1}{2} I\omega^2$.

L'énergie cinétique totale W du volant est égale à la somme des énergies cinétiques de toutes les particules telles que m_1, soit :

$$W = \frac{1}{2} m_1 \omega^2 r_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \omega^2 r_2^2 + \ldots$$

$$= \frac{1}{2} \omega^2 (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \ldots).$$

La quantité entre parenthèses n'est autre que le moment d'inertie I du volant par rapport à l'axe de rotation. Il en résulte que :

$$\boldsymbol{W = \frac{1}{2} I\omega^2}$$

L'énergie cinétique d'un corps animé d'un mouvement de rotation est égale au demi-produit de son moment d'inertie (par rapport à cet axe) ***par le carré de sa vitesse angulaire.***

EXEMPLE NUMÉRIQUE. — *Un disque de rayon $R = 0{,}2$ m pèse 38 kg. Il tourne autour de son axe à la vitesse de 600 tours par minute. Trouver son énergie cinétique.*

Rappelons que le moment d'inertie du disque est : $I = \frac{MR^2}{2}$.

Ici : $M = \frac{38}{9{,}81}$ unités de masse MKS.

$R = 0{,}2m$; d'où $R^2 = 0{,}04$.

Le moment d'inertie : $I = \frac{38}{9{,}81} \times \frac{0{,}04}{2} = 0{,}077$.

De plus : $\omega = \frac{\pi N}{30} = \frac{3{,}14 \times 600}{30} = 62{,}8$ *radians par seconde.*

$\omega^2 = \overline{62{,}8}^2 \simeq 3\,944$.

L'énergie cinétique du volant est donc :

$$W = \frac{1}{2} \times 0{,}077 \times 3\,944 \simeq \boldsymbol{152\ kg.m}$$

6. Énergie cinétique d'un corps solide animé d'un mouvement hélicoïdal.

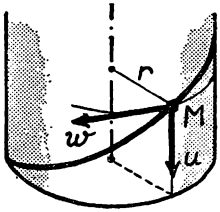


Fig. 5. — Dans un mouvement hélicoïdal, un point matériel M a pour vitesse $v = \sqrt{u^2 + w^2}$.

Nous avons vu que le mouvement hélicoïdal d'un point M résulte de la composition de deux mouvements (fig. 5) :

1° un *mouvement de rotation* de vitesse linéaire : $w = \omega r$;

2° un *mouvement de translation* de vitesse u dont la direction est perpendiculaire à celle de la vitesse w.

La vitesse résultante v du point M est :

$$v^2 = w^2 + u^2 = \omega^2 r^2 + u^2.$$

Par suite l'énergie cinétique d'un tel point de masse m s'écrit :

$$\frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 r^2 + \frac{1}{2} mu^2.$$

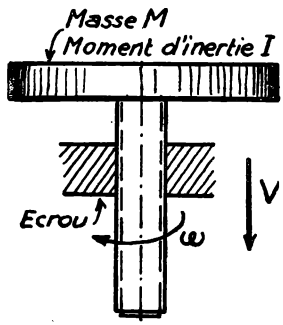


Fig. 6. — *L'énergie cinétique* d'un corps animé d'un mouvement hélicoïdal est :

$$W = \frac{1}{2} MV^2 + \frac{1}{2} I\omega^2.$$

Étendons ce résultat au cas d'un volant de presse à balancier animé d'un tel mouvement (fig. 6). Tous les points de ce volant ont :

1° même vitesse angulaire ω;

2° même vitesse de translation V.

Désignons par m_1, m_2, m_3, ... les masses de particules dont les distances à l'axe de rotation sont respectivement r_1, r_2, r_3, ... etc.

Pour chacune d'elles, l'énergie cinétique est :

$$W_1 = \frac{1}{2} m_1\omega^2 r_1^2 + \frac{1}{2} m_1 V^2$$

$$W_1 = \frac{1}{2} m_2\omega^2 r_2^2 + \frac{1}{2} m_2 V^2.$$

. . . . . .

L'énergie cinétique totale W du volant est égale à la somme :

$$W_1 + W_2 + \ldots \text{ etc.}$$

$$W = \frac{1}{2}\omega^2(m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + \ldots) + \frac{1}{2}V^2(m_1 + m_2 + \ldots).$$

Soit en définitive :

$$W = \frac{1}{2} I\omega^2 + \frac{1}{2} MV^2$$

L'énergie cinétique d'un corps solide animé d'un mouvement hélicoïdal est égale à l'énergie cinétique du corps dans le mouvement de rotation, augmentée de l'énergie cinétique dans le mouvement de translation.

7. Variations de l'énergie cinétique d'un corps solide.

Considérons un point matériel de masse m animée à l'instant t d'une vitesse v. Son énergie cinétique à cet instant est $W = \frac{1}{2} mv^2$.

Soit v' sa vitesse à l'instant t' qui vient après l'instant t. L'énergie cinétique correspondante est : $W' = \frac{1}{2} mv'^2$.

Nous dirons qu'entre l'instant t et l'instant t', l'énergie cinétique du point matériel a *varié* d'une quantité mesurée par la différence :

$$W' - W = \frac{1}{2} mv'^2 - \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} m(v'^2 - v^2).$$

1° *Si v' est supérieur à v*, la différence $W' - W$ est positive : il y a accroissement d'énergie cinétique.

2° *Si v' est inférieur à v*, la différence $W' - W$ est négative : il y a diminution d'énergie cinétique.

REMARQUE. — On étendrait sans peine ces considérations au cas d'un corps solide.

8. Ce qu'on entend dans l'industrie par le PD² d'un volant.

Le volant calé sur l'arbre principal de certaines machines est assimilé à un anneau cylindrique de moment d'inertie $I = M\left(R_{moy}^2 + \frac{a^2}{4}\right)$ [40e Leçon, parag. 6].

Négligeons la hauteur a de la jante par rapport au rayon moyen qui est généralement grand :

$I = M R_{moy}^2 = M \frac{D^2}{4} = \frac{PD^2}{4g}$ [P : le poids; D le diamètre moyen].

Soit ω la vitesse angulaire. Elle est sensiblement constante comme

nous le verrons plus loin. L'énergie cinétique du volant est alors :

$$W = \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{1}{2} \frac{PD^2}{4g} = \frac{\omega^2}{8g} \cdot PD^2.$$

Pour une vitesse donnée ω, la valeur de PD^2 caractérise donc l'énergie cinétique du volant sans toutefois la mesurer.

EXEMPLE. — Un volant pesant 4 000 *kgp* et de diamètre moyen 4 *m* a un PD^2 égal à $4\,000 \times 4^2 = 64\,000$ *kgp. m²*. S'il tourne à raison de 120 *tr/mn*, $\omega = \frac{\pi \times 120}{30}$ $= 12{,}56$ *r/s*. Son énergie cinétique $i = \frac{12{,}56^2}{9 \times 9.81} \times 64\,000 \simeq 128\,500$ *kg. m.*

Résumé

1. **Le travail d'une force peut avoir pour effet de modifier la vitesse du corps auquel elle est appliquée.**

2. **L'énergie cinétique d'un point matériel de masse *m* animé d'une vitesse *v* a pour valeur :**

$$\boxed{W = \frac{1}{2} mv^2}$$

3. **L'énergie cinétique d'un corps solide de masse M a pour expression :**

$\boxed{W = \frac{1}{2} MV^2}$ pour une ***translation*** de vitesse *V*.

$\boxed{W = \frac{1}{2} I\omega^2}$ **pour une *rotation* de vitesse angulaire ω.**

$\boxed{W = \frac{1}{2} MV^2 + \frac{1}{2} I\omega^2}$ **pour un mouvement hélicoïdal.**

(I est le moment d'inertie du corps par rapport à l'axe de rotation).

Exercices

1. Un mouton d'estampage pesant 200 *kg* tombe d'une hauteur de 4,50 *m*.
Calculer sa vitesse et son énergie cinétique au bas de la chute.
Quel travail faudra-t-il dépenser pour le ramener à son point de départ? Comparer les résultats obtenus.

2. Un train pesant 400 *tonnes* roule en palier à la vitesse de 60 *km/h*.
Quelle est son énergie cinétique?

3. Un forgeron communique à un marteau pesant 10 *kg* une vitesse de 6 *m/s*. Quelle est l'énergie cinétique de ce marteau?

4. Calculer l'énergie cinétique d'un volant plein tournant à raison de 300 *tours par minute* et dont les caractéristiques sont les suivantes :
matière : fonte (poids spécifique 7,2 *kgp* par dm^3)
diamètre : 800 *mm; épaisseur :* 100 *mm.*

Théorème de l'énergie cinétique.

1. Les effets du travail d'une ou de plusieurs forces.

EXEMPLE 1. — Observons un mouton d'estampage en action (fig. 1). Pendant la chute, le poids du mouton effectue un *travail positif*. Nous constatons que *sa vitesse s'accroît.*

EXEMPLE 2. — Lançons une pierre verticalement de bas en haut. Une fois partie elle n'est plus soumise qu'à son poids [1]. Celui-ci effectue pendant l'ascension un *travail négatif*. Nous constatons que *la vitesse décroît.*

Lorsque cette vitesse s'annule, la pierre retombe, le travail de son poids devient positif et la vitesse augmente jusqu'à l'arrivée au sol.

EXEMPLE 3. — Lançons une bille sur un plan horizontal bien poli. Le *travail de son poids est nul; sa vitesse resterait constante* si le frottement et la résistance de l'air étaient nuls.

EXEMPLE 4. — Voici une automobile qui roule à la vitesse constante de 80 *km/h*. Le conducteur cesse d'appuyer sur l'accélérateur et pousse sur la pédale de débrayage, ce qui a pour effet d'isoler le moteur des organes de transmission du mouvement.

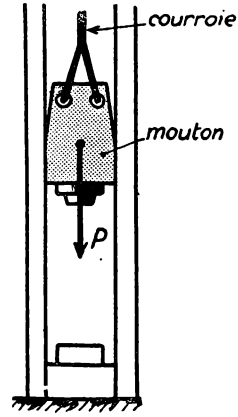


Fig. 1. — Pendant la chute du mouton son poids P produit un travail positif : la vitesse s'accroît.

La voiture ralentit progressivement et s'arrête au bout d'un certain temps. La résistance de l'air, les frottements effectuent un travail négatif dont l'effet est de faire décroître la vitesse.

Ces quelques exemples nous montrent que *la vitesse d'un mobile :*

1° *augmente quand la somme des travaux des forces qui le sollicitent est positive;*

2° *diminue si la somme de ces travaux est négative;*

3° *reste constante si cette somme est nulle.*

2. Existe-t-il une relation simple entre le travail et la variation de vitesse correspondante ?

Soit une bille de masse *m*, immobile sur un plan horizontal (fig. 2). Nous l'assimilerons à un point matériel.

1. Nous négligeons la résistance de l'air.

Sous l'action d'une force F constante en direction, sens et grandeur, elle prend un mouvement rectiligne uniformément accéléré, dont l'accélération $\gamma = \frac{F}{m}$.

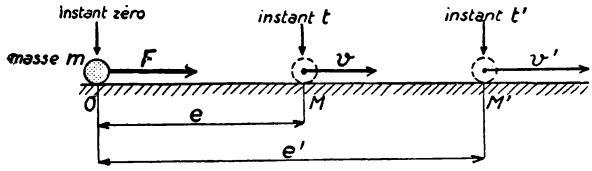


Fig. 2. — La variation **d'énergie cinétique** de la bille entre les instants t et t' est égale au travail de la force F entre les mêmes instants.

Soient : e l'espace parcouru à l'instant t :

$$e = \frac{1}{2}\gamma t^2$$

v la vitesse à cet instant : $v = \gamma t$.

Dans l'intervalle de temps compris entre 0 et t, la force F a produit un travail mesuré par $F \times e$, soit :

$$F \times e = F \times \frac{1}{2}\gamma t^2 = m\gamma \times \frac{1}{2}\gamma t^2 = \frac{m}{2}\gamma^2 t^2 = \frac{1}{2}mv^2. \qquad (1)$$

De même. si nous désignons par :
e' l'espace parcouru à l'instant t' postérieur à t,
v' la vitesse à cet instant,
la force F aura produit à l'instant t' un travail :

$$F \times e' = \frac{1}{2}mv'^2. \qquad (2)$$

Retranchons membre à membre les égalités (2) et (1).

$$F(e' - e) = \frac{1}{2}mv'^2 - \frac{1}{2}mv^2.$$

Le premier membre représente le travail produit par la force F entre l'instant où la vitesse de la bille est v et l'instant où cette vitesse prend la valeur v'.

Le second membre représente la variation de l'énergie cinétique entre les mêmes instants.

Conclusion. — *L'accroissement de l'énergie cinétique du point matériel, entre deux instants déterminés, est égal au travail accompli pendant le même temps par la force constante qui le sollicite.*

3. Théorème de l'énergie cinétique.

Le théorème précédent s'étend au cas de corps animés de mouvements quelconques, soumis à l'action d'une ou de plusieurs forces constantes ou variables.

Nous généraliserons sans démonstration le *théorème de l'énergie cinétique :*

La variation d'énergie cinétique d'un système de corps en mouvement, pendant un intervalle de temps donné, est égale à

la somme algébrique des travaux de toutes les forces qui agissent sur ce système pendant le même temps.

Si l'on désigne par :

W_0 l'énergie cinétique à l'instant initial de l'intervalle de temps considéré;

W l'énergie cinétique à l'instant final;

A la *somme algébrique* des travaux de toutes les forces qui agissent sur le système, pendant l'intervalle de temps qui sépare l'instant initial de l'instant final, nous écrirons :

$$W - W_0 = A$$

APPLICATIONS DU THÉORÈME DE L'ÉNERGIE CINÉTIQUE.

Ce théorème est fréquemment appliqué, car il permet :

1° de calculer les variations de vitesse d'un système mobile quand on peut connaître les masses des corps qui le constituent et les travaux des forces qui agissent sur lui;

2° inversement, connaissant la masse d'un système mobile et les variations de sa vitesse pendant un certain intervalle de temps, de calculer les forces qui ont agi sur lui pendant cet intervalle.

C'est ce que nous allons montrer sur quelques exemples simples.

4. Problème 1.

Un corps est lancé de bas en haut avec une vitesse v_0. A quelle hauteur h montera-t-il?

Soit m la masse du corps. La seule force qui le sollicite est son poids :

$$p = mg.$$

Exprimons successivement :

1° *l'énergie cinétique à l'instant initial :* $W_0 = \frac{1}{2} m v_0^2$,

2° *l'énergie cinétique à l'instant final* où la vitesse est nulle :

$$W = \frac{1}{2} m \times 0 = 0,$$

3° *le travail du poids* qui est négatif : $A = - mgh$.

Et appliquons le théorème de l'énergie cinétique :

$$0 - \frac{1}{2} m v_0^2 = - mgh.$$

d'où :

$$h = \frac{v_0^2}{2g}.$$

Résultat déjà obtenu par une autre méthode (8e Leçon).

5. Problème 2.

Un point matériel tombe sans vitesse initiale sous l'action de son poids p en suivant une ligne sinueuse MN. Quelle est sa vitesse v en arrivant en N si l'on suppose que le frottement est nul? (fig. 3).

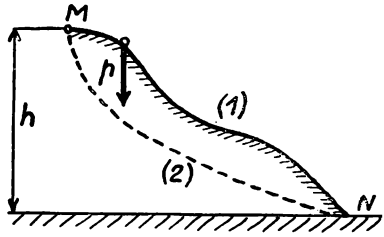


Fig. 3. — La bille part du point M sans vitesse initiale. Calculez sa vitesse lorsqu'elle arrive en N.

La variation d'énergie cinétique pendant la chute est :

$$W - W_o = \frac{1}{2}mv^2 - 0 = \frac{1}{2}mv^2.$$

Au cours de cette chute, le poids p du point matériel de masse m effectue un travail positif mesuré par $ph = mgh$.

Appliquons le théorème de l'énergie cinétique :

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh.$$

D'où :

$$v = \sqrt{2gh}$$

Quelle que soit la forme de la ligne MN, la vitesse à l'arrivée au sol est la même que si le corps tombait en chute libre d'une hauteur h.

Remarque. — Ce raisonnement n'est valable que si l'on suppose le frottement nul, ce qui est approximativement le cas d'une chute d'eau dans une conduite.

6. Problème 3.

Un train pesant 300 *tonnes roule à la vitesse de* 20 *mètres par seconde. A un certain moment le mécanicien fait agir les freins. Le train s'arrête après avoir parcouru* 400 *mètres depuis le début du freinage. Quelles conclusions en tirer?*

A l'instant où le mécanicien bloque les freins, l'énergie cinétique du train est : $W_o = \frac{1}{2}MV^2$ (*mouvement de translation*).

A l'instant où le train s'arrête la vitesse est nulle et l'énergie cinétique :

$$W = 0.$$

La variation d'énergie cinétique correspondante est

$$W - W_o = -\frac{1}{2}MV^2.$$

Elle est négative, donc c'est que des *forces résistantes,* dont le travail est négatif, ont agi sur le corps en mouvement.

Cherchons l'intensité F de la force unique constante qui, ayant la

même direction que le mouvement, produirait le même effet que toutes ces forces. Son travail est $A = -F \times l$.

Nous pouvons écrire : $-Fl = -\frac{1}{2} MV^2$.

D'où : $$F = \frac{MV^2}{2l}.$$

Utilisons les unités M T S

M = 300 *tonnes-masse;* V = 20 *m/s;* $V^2 = 400$; $l = 400$ *mètres.*

$$F = \frac{300 \times 400}{2 \times 400} = \textbf{\textit{150 sthènes.}}$$

REMARQUE. — 1 *sthène* = 102 *kilogrammes-poids,* donc :
F = 102 × 150 = 15 300 kilogrammes-poids = 15,3 tonnes-poids.

7. Problème 4.

Un volant dont le moment d'inertie I = 0,1 unités M K S, tourne à raison de 750 tours par minute (fig. 4). *A un certain moment il cesse d'être entraîné. On constate qu'il fait 2 500 tours avant de s'arrêter. Trouver la valeur moyenne du couple résistant.*

Calculons la vitesse angulaire initiale du volant :

$$\omega_0 = \frac{\pi N}{30} = \frac{3{,}14 \times 750}{30} = 78{,}5 \ r/s.$$

A l'instant initial l'énergie cinétique du volant est :

$$W_0 = \frac{1}{2} I\omega_0^2 = \frac{1}{2} \times 0{,}1 \times 78{,}5^2 = 308 \ kg.m$$

A l'instant final l'énergie cinétique W = 0. Par suite :

$$W - W_0 = -308 \ kg.m$$

La variation d'énergie cinétique est négative. Elle correspond au travail négatif de forces résistantes. Celles-ci proviennent du frottement sur les paliers et de la résistance de l'air. Elles produisent un couple résistant de moment $\mathcal{M}$ que nous supposerons constant.

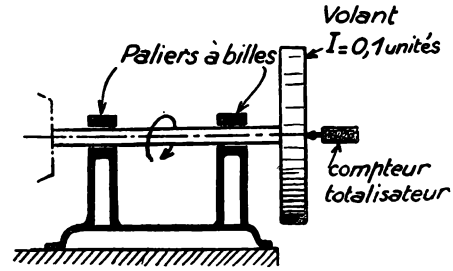


Fig. 4.

Après 2 500 tours, ce *couple résistant* a produit un travail négatif :

$$A = -\mathcal{M} \times 2\pi \times 2\,500 = -15\,700\,\mathcal{M}$$

Appliquons le théorème de l'énergie cinétique :

$$-308 = -15\,700\,\mathcal{M}$$

d'où : $$\mathcal{M} = \frac{308}{15\,700} \simeq \textbf{\textit{0,02 m.kg}}$$

8. Applications aux outils et aux machines.

1. Les marteaux. — Nous pouvons maintenant préciser leur mode d'action. Un marteau emmagasine de l'énergie cinétique pendant qu'il retombe, grâce au travail positif de son poids et de la force exercée sur le manche par l'ouvrier.

Toute cette énergie est transformée en travail pendant le choc : elle fournit le travail nécessaire pour enfoncer le clou ou modifier la forme du fer que l'on forge.

2. Une varlope a un fût de grande masse : c'est pour emmagasiner de l'énergie cinétique pendant la première partie de sa course, alors que le fer ne coupe pas, et la restituer pendant que le fer enlève le copeau. Elle régularise ainsi le mouvement de l'ouvrier. Elle joue le *rôle de volant* que nous allons étudier.

3. Le volant. — Sur l'arbre d'une machine à vapeur à piston, d'un moteur à explosion, on cale souvent un *volant* dont le moment d'inertie I est grand.

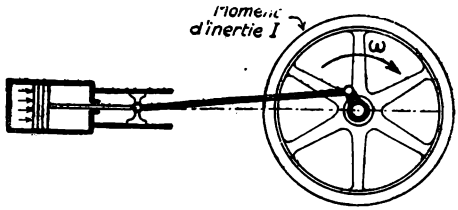


Fig. 5. — Le volant d'une machine est un *magasin* d'énergie. Il régularise la vitesse de la machine.

Considérons une machine à vapeur dont l'arbre tourne avec une vitesse angulaire ω. Le volant possède alors une énergie cinétique égale à $1/2\, I\omega^2$. Nous constatons :

1° *que le système formé par l'arbre et le volant reçoit du travail.* C'est le *travail moteur* A_m produit par la poussée de la vapeur qui déplace le piston;

2° *que le même système cède du travail* aux machines qu'il met en mouvement par l'intermédiaire des transmissions. C'est un *travail résistant* A_r, négatif par convention.

Si le travail reçu est constamment égal au travail cédé, la différence $A_m - A_r = 0$, et l'énergie cinétique du volant demeure invariable : ω demeure constante.

Si, pendant un intervalle de temps Δt, le travail reçu est supérieur au travail cédé, la différence $A_m - A_r$ est positive; l'énergie cinétique du volant s'accroît et sa vitesse angulaire à la fin de l'intervalle Δt, est ω' supérieure à ω, telle que :

$$A_m - A_r = \frac{1}{2} I\omega'^2 - \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{1}{2} I(\omega'^2 - \omega^2).$$

Comme I est très grand, la différence $(\omega'^2 - \omega^2)$ est faible et ω' diffère peu de ω.

Si, pendant l'intervalle de temps Δt, le travail moteur est inférieur au travail résistant, la différence $A_m - A_r$ est négative, l'énergie cinétique du volant diminue, sa vitesse angulaire prend une valeur ω'' qui, pour la même raison que précédemment, est peu différente de ω.

Or, dans une machine à vapeur en régime normal, le travail moteur est, dans l'étendue d'un tour de l'arbre, supérieur pendant certains intervalles de temps, inférieur pendant certains autres, au travail résistant. La vitesse angulaire du volant oscille donc entre deux valeurs ω' et ω'' d'autant plus rapprochées que le moment d'inertie est plus grand.

Le volant a donc pour effet de maintenir à peu près constante la vitesse de rotation de la machine, malgré les variations des forces qui agissent, soit pour accroître sa vitesse, soit pour la diminuer.

Résumé

1. ***Théorème de l'énergie cinétique :***
La variation d'énergie cinétique d'un système de corps en mouvement, pendant un intervalle de temps déterminé, est égale à la somme algébrique des travaux de toutes les forces qui agissent sur ce système pendant le même temps.

$$W - W_0 = A$$

A un travail positif A correspond un accroissement, et, à un travail négatif, une diminution de l'énergie cinétique.

2. **Si le travail positif d'une ou de plusieurs forces peut être transformé en énergie cinétique, inversement cette énergie peut être transformée en travail.**

3. **L'emploi d'un volant est indispensable dans une machine alternative :**
1° il emmagasine l'excès du travail moteur sur le travail résistant et il restitue cette énergie lorsque le travail moteur est inférieur au travail résistant ;
2° il maintient la vitesse de rotation à peu près constante.

Exercices

1. Au sommet d'une côte, un cycliste roule à la vitesse de 2 *m/s*. Quelle sera sa vitesse au bas de la côte sachant que la différence de niveau est de 40 *m* ? (Poids de l'homme et de la bicyclette 80 *kg*. On néglige les résistances de l'air et le frottement.)

2. Une sphère pesant 200 *g* est mobile autour l'un point fixe O (fig. 6).
On l'abandonne à elle-même en A.
1° Quelle est son énergie cinétique et sa vitesse au point B ?
2° En B le fil casse. Quel est le mouvement ultérieur de la bille ?
3° A quelle distance de la verticale du point O tombera-t-elle sur le sol ?

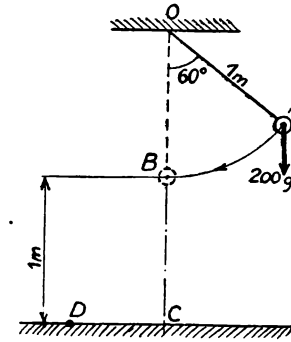


Fig. 6.

3. Un train pesant 500 *tonnes* roule en palier avec une vitesse de 10 *m/s*.
Le mécanicien freine et le train s'arrête après avoir parcouru 350 *m* depuis le début du ralentissement.
Exprimer en kilogrammes-poids la force constante qui serait susceptible de l'arrêter sur la même distance ?

4. Une automobile en ordre de marche pèse 1 *tonne*. Dans tout ce qui suit, nous admettons qu'elle peut être assimilée à un solide glissant sans frottement sur une route supposée elle-même parfaitement plane, horizontale ou en pente.
1° Quelle force F, constante en direction, sens et grandeur, faut-il lui appliquer pour que, partant du repos, elle ait une vitesse de 54 *km/h* après avoir parcouru le palier OA = 225 *m* ?
2° L'automobile, après avoir parcouru ces 225 mètres, aborde, à la vitesse de 54 *km/h*, une montée AB longue de 500 *m*. La force motrice F reste constamment égale, pendant toute la montée, à la valeur qu'elle avait en palier. L'automobile arrive en haut de la montée avec une vitesse de 36 *km/h*. De quelle hauteur *h* la route s'élève-t-elle au cours de cette montée ?
3° Quel est le travail moyen par seconde mis en jeu par la force F sur le premier parcours (parcours en palier, OA = 225 *m*) ?
Nota. — On utilisera le système d'unités MTS.

5. Un camion dont la masse est de 3 *tonnes* est animé d'une vitesse de 48 *km/h*. Il se déplace sur une route rectiligne et horizontale. On arrête le moteur. Sous l'action des résistances passives, qu'on supposera constantes, le camion s'arrête. Cet arrêt se produit une minute après la suppression de la force propulsive.

Evaluer

a. Le chemin parcouru après l'arrêt du moteur

b. La valeur des résistances passives

c. La valeur de la force propulsive.

d. Quelle force supplémentaire aurait-on dû appliquer pour arrêter le camion par freinage en 30 *secondes* ?

e. Quelle eût été alors la quantité de chaleur engendrée dans le frein ?

Equivalent mécanique de la petite calorie : 4,18 *Joules*

Employer dans tous les calculs le système : MTS

6. On considère la presse à balancier représentée figure 1, page 123.

Le volant est en fonte (poids spécifique 7,2 kg/dm^3, rayon moyen 0,45 *m*, épaisseur 75 *mm*). La jante, de section rectangulaire (base 100 *mm*, hauteur 75 *mm*), est reliée au moyeu par quatre bras.

La vis du poinçon est à 4 filets (diamètre 90 *mm*, pas 75 *mm*). Le poinçon pèse 200 *kg*.

Le volant part du repos et acquiert en fin de course descendante une vitesse linéaire de 5, 7 *m/s* à sa périphérie

A. Calculer :

1° Le moment d'inertie du volant supposé réduit à sa jante ,

2° La vitesse de rotation de la vis en fin de course et la vitesse de translation correspondante du système : *volant-vis-poinçon ;*

3° L'énergie cinétique de rotation et l'énergie cinétique de translation du volant en fin de course ;

4° L'énergie cinétique de translation du poinçon.

B. Montrer qu'on peut négliger la somme des énergies de translation par rapport à l'énergie de rotation du volant.

a) Abstraction faite des résistances de frottement aux divers guidages, que représente la variation d'énergie cinétique depuis le point le plus haut jusqu'au point le plus bas ?

b) Sachant que toute l'énergie cinétique acquise pendant la course descendante est utilisée pour comprimer une matière plastique qui s'écrase sur une profondeur de 3 *mm*, calculer l'intensité moyenne de la résistance à l'écrasement

Transmission du travail dans les machines simples. Conservation du travail.

1. Dans toute machine simple en fonctionnement on peut considérer un travail moteur et un travail résistant.

Considérons un treuil. Pour maintenir la charge en équilibre, il suffit d'exercer sur la poignée de la manivelle un certain effort F que nous avons appris à calculer. Or le but du treuil n'est pas de maintenir la charge immobile mais de la faire monter ou de la faire descendre.

Dans le mouvement de montée la force F qui provoque le mouvement engendre un certain *travail moteur* A_m auquel correspond un *travail résistant* A_r de la charge.

Dans toute machine simple en fonctionnement nous pouvons ainsi distinguer le travail moteur et le travail résistant.

2. Dans toute machine simple en mouvement uniforme le travail moteur est égal au travail résistant.

D'après le théorème de l'énergie cinétique, la variation d'énergie d'un corps en mouvement est égale à la somme algébrique des travaux des forces qui le sollicitent.

En particulier, dans une machine simple, les travaux des forces extérieures sont respectivement A_m et A_r, d'où :

$$W - W_0 = A_m - A_r. \qquad (1)$$

Si le mouvement est uniforme, la vitesse est constante et la variation d'énergie cinétique est nulle. On a donc :

$$A_m = A_r$$

GÉNÉRALISATION. — Cette égalité est vraie non seulement pour les machines simples mais encore pour les machines qui en dérivent :

Lorsqu'une machine est animée d'un mouvement uniforme, le travail moteur est égal au travail résistant.

3. Dans toute machine simple, si la force motrice et la résistance se font équilibre à tout instant, le travail moteur est égal au travail résistant et le mouvement est uniforme.

Nous allons montrer directement sur quelques exemples que, *si à*

tout instant, la force motrice et la résistance se font équilibre, il y a égalité entre le travail moteur et le travail résistant.

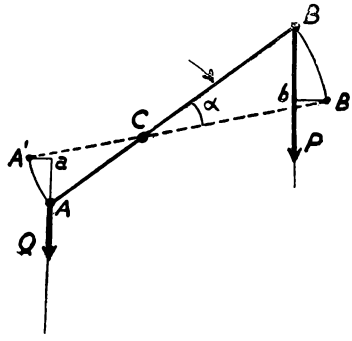


Fig. 1. — Pour une rotation du levier mesurée par l'angle α, le travail moteur $A_m = P \times Bb$ et le travail résistant $A_r = Q \times Aa$. Montrez que le travail moteur est égal au travail résistant si $CB \times P = CA \times Q$.

Nous supposerons que les frottements sont nuls et que les poids des diverses parties de la machine sont négligeables.

A. Cas du levier. — Soit le levier ACB mobile autour du point C (fig. 1).

La force motrice est P, la force résistante Q. Nous supposerons que leurs directions demeurent verticales au cours du mouvement qui amène AB en A'B' après une rotation d'angle α.

Le travail moteur $A_m = P \times Bb$ (Bb est la projection du déplacement $\overset{\frown}{BB'}$ sur la direction de la force P).

Le travail résistant $A_r = Q \times Aa$ (Aa est la projection du déplacement $\overset{\frown}{AA'}$ sur la direction de la force Q).

Les forces P et Q se font équilibre à tout instant, donc $\frac{P}{Q} = \frac{CA}{CB}$. (2)

Si nous considérons les triangles semblables :

1° AaA' et BbB' : $\frac{Aa}{Bb} = \frac{AA'}{BB'}$.

2° AA'C et BB'C : $\frac{AA'}{BB'} = \frac{CA}{CB}$,

nous voyons que $\frac{Aa}{Bb} = \frac{CA}{CB}$ et par suite, la relation (2) s'écrit :

$$\frac{P}{Q} = \frac{Aa}{Bb},$$

d'où nous tirons :

$$P \times Bb = Q \times Aa.$$

Cette dernière égalité montre que $A_m = A_r$. Le travail moteur est donc égal au travail résistant.

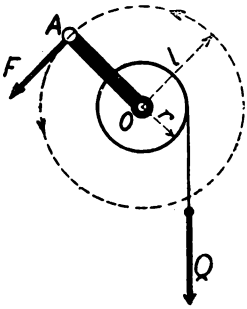


Fig. 2. — Si à tout instant $F \times l = Q \times r$, montrez que : $A_m = A_r$.

B. Cas du treuil. — Soit le treuil de la figure 2. Lorsque les forces F et Q se font équilibre : $F \times l = Q \times r$.

Multiplions les 2 membres de cette égalité par 2π.

Nous obtenons :

$$F \times 2\pi l = Q \times 2\pi r.$$

Le premier membre exprime le travail moteur A_m de la force F pour un tour de la manivelle.

Mais le treuil ayant lui aussi tourné d'un tour, la charge est montée d'une longueur égale à $2\pi r$. Il en résulte que le second membre de l'égalité ci-dessus exprime le travail résistant A_r de la force Q.

On a donc bien :

$$A_m = A_r.$$

C. Cas du plan incliné. — Soit F la force qui maintient le corps en équilibre sur le plan incliné (fig. 3).

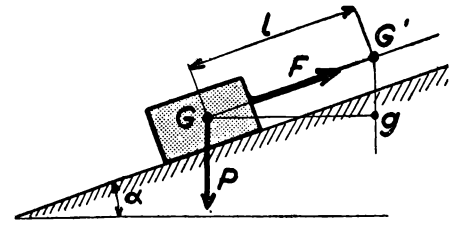


Fig. 3. — Le travail moteur est égal au travail, résistant si, à tout instant, F = P sin α.

Sa valeur numérique :

$$F = P \sin \alpha.$$

Appelons l le déplacement du point G. Le travail moteur de la force F est : $A_m = F \times l = P \times \sin \alpha \times l$.

Le travail résistant de la force P, constante en direction, sens et grandeur, est égal au produit de cette force par la projection du déplacement GG′ de son point d'application sur la direction de la force, c'est-à-dire par gG′.

$$A_r = P \times gG'.$$

Or dans le triangle rectangle GgG′, l'angle

$$\widehat{gGG'} = \alpha \text{ et } gG' = GG' \times \sin \alpha = l \sin \alpha.$$

D'où $$A_r = P \times l \times \sin \alpha.$$

Une fois de plus nous vérifions que $A_m = A_r$.

REMARQUE. — D'après l'égalité (1), si $A_m = A_r$, $W - W_0 = 0$ et par suite, le mouvement est uniforme.

4. Conservation du travail dans les machines simples.

1° *La machine reçoit du travail :* c'est le travail moteur A_m engendré par le déplacement de la force motrice;

2° *la machine fournit du travail :* c'est le travail A_r employé à déplacer la force résistante.

Nous venons de voir que, si le mouvement est uniforme : $A_m = A_r$; c'est-à-dire que la machine cède autant de travail qu'elle en a reçu.

Une machine ne crée donc pas de travail. Elle rend, sous forme utile, une quantité de travail égal au travail moteur qu'on lui a fourni. C'est en cela que consiste le principe de la conservation du travail mécanique.

5. Le rôle des machines simples est de transformer les facteurs du travail.

Reprenons l'exemple du treuil (fig. 2). Soient :

$$Q = 40\ kgp;\quad r = 0{,}10\ m\quad l = 0{,}40\ m.$$

La force F qui produit l'équilibre a pour valeur numérique :

$$F = \frac{Qr}{l} = \frac{40 \times 0{,}1}{0{,}4} = 10\ kgp$$

Supposons qu'on veuille élever la charge à 5 mètres au-dessus du sol. Le travail résistant : $A_r = 40 \times 5 = 200\ kg.m.$

Soit e le chemin parcouru par le point d'application de la force tangenticile F. Puisque le travail moteur est égal au travail résistant :

$$A_m = F \times e = 200\ kg.m$$

D'où :

$$e = \frac{200}{10} = 20\ m$$

Cet exemple nous montre que pour produire un travail déterminé : celui d'une force de 40 *kgp* déplaçant son point d'application de 5 *m*, il suffit d'une autre force de 10 *kgp*, 4 fois plus faible (donc plus facile à produire) se déplaçant sur un chemin de 20 *m*, donc 4 fois plus long.

Une machine simple restitue donc le travail qu'on lui a fourni mais elle modifie l'intensité de la force et la longueur du déplacement qui l'ont produit. On dit que, dans une telle machine, ***ce que l'on gagne en force on le perd en chemin parcouru.***

6. Ce qu'on entend par énergie potentielle.

Rappelons qu'un corps possède de l'énergie lorsqu'il peut produire du travail [1].

Nous connaissons l'énergie cinétique et nous avons vu qu'elle pouvait être transformée en travail. C'est une forme de l'*énergie mécanique.*

Lorsqu'on comprime un ressort il faut dépenser du travail. La détente du ressort peut être ensuite utilisée pour lancer un projectile. Le ressort restitue ainsi le travail dépensé pour le comprimer et cette énergie qu'il a pour ainsi dire gardée en réserve jusqu'à l'instant de la détente s'appelle ***énergie potentielle.***

De même, pour élever un corps pesant d'un niveau A au niveau B (fig. 4), il faut dépenser un travail égal à P × H.

Ce travail, qu'on pourrait croire dépensé en pure perte, peut être restitué de deux manières :

1° par un mouvement de descente uniforme, le poids, suspendu à un câble, peut faire fonctionner un mécanisme (horloges à poids moteur par exemple);

1. Voir Cours d'Electricité 2e Année des Écoles Nationales Professionnelles.

2° Si le corps tombe en chute libre, il acquiert de l'énergie cinétique transformable en travail.

Nous dirons qu'au niveau B le corps possède une *énergie potentielle* égale à P × H, qu'il conserve tant qu'il demeure immobile.

7. Principe de la conservation de l'énergie mécanique.

Étudions la variation de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle au cours de la chute libre (fig. 4), *à partir du niveau B.*

1° En B, l'énergie potentielle est égale à P H et l'énergie cinétique est nulle.

2° Lorsque le corps passe en C son énergie potentielle a diminué et elle a pour valeur : P × *h*. Mais il a acquis une certaine vitesse *v;* il a une énergie cinétique, que l'on peut calculer en appliquant le théorème de l'énergie cinétique : $\frac{1}{2} Mv^2 = P \times h'$.

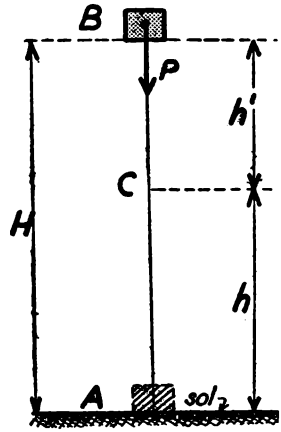


Fig. 4. — Au point B le corps possède une **énergie potentielle** égale à P × H. Pendant la chute elle diminue mais l'énergie cinétique croît : *l'énergie mécanique totale* demeure constante.

L'*énergie mécanique totale, qui est la somme des deux énergies potentielle et cinétique,* a donc pour valeur au niveau C :

$$\frac{1}{2} Mv^2 + Ph = Ph' + Ph = P(h + h') = PH.$$

3° Enfin, à l'arrivée au sol (vitesse V), l'énergie potentielle est nulle et l'énergie cinétique : $\frac{1}{2} MV^2 = P \times H.$

Le tableau suivant résume ce qui précède :

Position du corps.	Énergie Potentielle.	Énergie Cinétique.	Énergie Totale.
B	P H	0	P H
C	P *h*	P *h'*	P H
A	0	P H	P H

On voit qu'au cours de la chute, l'énergie potentielle se transforme en énergie cinétique, mais que ***l'énergie mécanique totale demeure invariable.*** *(Principe de la conservation de l'énergie mécanique.)*

Quand le corps rencontre le sol, son énergie mécanique disparaît. On montre que le choc donne naissance à une quantité équivalente d'énergie calorifique, et des expériences précises ont prouvé que ***426 kg.m*** *font apparaître une quantité de chaleur égale à* ***1 millithermie*** *(grande calorie).*

REMARQUE. — Ainsi, le travail dépensé dans une machine, ou pour élever un corps d'un niveau à un autre, n'est jamais perdu. Il peut être restitué sous des formes variables en quantité équivalente. D'une manière générale, l'homme ou les machines ne créent pas l'énergie. Ils ne peuvent que transformer celle que la Nature met à leur disposition.

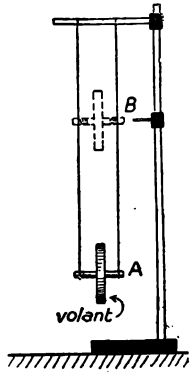


Fig. 5. — Expliquez ce qui se passe lorsqu'on abandonne le volant au point B.

EXPÉRIENCE. — Un petit volant en acier est suspendu à l'aide de deux fils comme l'indique la figure 5. Remontons-le de A en B en enroulant les fils sur son axe et abandonnons-le à lui-même. Il descend et en même temps tourne de plus en plus vite. Arrivé en A il ne peut plus descendre. Nous constatons qu'il remonte en tournant jusqu'à son point de départ où il arrive avec une vitesse de rotation et une vitesse de translation nulles. Puis le même cycle recommence.

Nous voyons que dans l'intervalle de temps qui sépare deux passages successifs en B, le volant a conservé toute l'énergie que nous lui avions fourni en l'élevant primitivement de A en B. De B en A elle se transforme en énergie cinétique, et celle-ci se transforme à son tour, de A en B, en énergie potentielle. En réalité le frottement, la raideur des fils, absorbent une partie de cette énergie et le volant ne remonte pas tout à fait au point B. Il exécute alors une série de descentes et de montées dont l'altitude décroît progressivement.

Résumé.

1. Transmission du travail dans une machine simple : Lorsqu'on fournit à une machine simple en mouvement uniforme une certaine quantité de travail, elle le restitue intégralement en modifiant généralement l'intensité de la force et la longueur du déplacement qui ont donné naissance à ce travail.

On dit que dans une machine simple :

a) ***le travail moteur est égal au travail résistant;***

b) ***ce que l'on gagne en force on le perd en chemin parcouru.***

2. Conservation de l'énergie : L'énergie mécanique se présente sous deux formes : l'***énergie cinétique*** et l'***énergie potentielle.*** Celle-ci, qu'on pourrait appeler énergie de réserve, peut se transformer en travail ou en énergie cinétique.

On montre qu'au cours de la transformation, la somme de l'énergie potentielle et de l'énergie cinétique reste constante ***(Principe de la conservation de l'énergie).***

Exercices.

1. En reprenant les conditions d'équilibre étudiées en statique, montrer que le travail moteur est égal au travail résistant :

a) dans la poulie fixe et la poulie mobile,

b) dans le palan ordinaire et le palan de Weston.

2. Établir l'équation d'équilibre du vérin à vis en écrivant que le travail moteur, pour un tour de la vis, est égal au travail résistant.

3. On élève un corps pesant 25 *kg* à une hauteur de 12 *m* au-dessus du sol. Calculer son énergie potentielle.

On le laisse ensuite tomber sur une plateforme distante du sol de 4 *mètres*. Calculer son énergie cinétique en arrivant sur cette plateforme.

En admettant que le choc transforme entièrement cette énergie en chaleur, quelle sera la quantité de chaleur produite?

Le corps possède-t-il encore de l'énergie? Dire sa nature et l'évaluer.

4. Appliquer le principe de la conservation de l'énergie à la *sonnette* (fig. 6) destinée aux battage des pieux.

Sachant que le mouton pèse 500 *kg* et qu'il tombe d'une hauteur de 2,50 *m* :

1° Calculer la vitesse du mouton au bas de la chute, ainsi que son énergie cinétique;

2° En admettant que toute cette énergie sert à enfoncer le pieu, calculer la résistance opposée par le sol à l'enfoncement, sachant que le pieu s'est abaissé de 0,03 *m* après le premier coup.

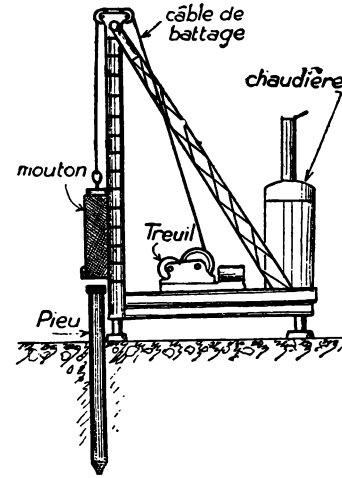


Fig. 6. — *Sonnette* pour le battage des pieux. Expliquez comment elle fonctionne.

LECTURE. — Descartes et la théorie des machines simples.

Dans un écrit intitulé « *Explication des machines et engins par l'aide desquels on peut, avec une petite force, lever un fardeau fort pesant* », le célèbre philosophe et mathématicien français Descartes (1596-1650) énonce le principe de la conservation du travail, et voici ce qu'il écrit à propos de la poulie (pour bien comprendre le texte il suffira au lecteur de dessiner une poulie mobile à brins parallèles) :

« *Soit ABC une corde passée autour de la poulie D, à laquelle poulie soit attaché le poids E. Et, premièrement, supposant que deux hommes soutiennent ou haussent également chacun un des bouts de cette corde, il est évident que si ce poids pèse* 200 *livres chacun de ces hommes n'emploiera, pour le soutenir ou soulever* 100 *livres, car chacun n'en porte que la moitié. Faisons après cela que A, l'un des bouts de cette corde, étant attaché ferme à quelque chose, l'autre C, soit derechef soutenu par un homme; et il est évident que cet homme, en C, n'aura besoin, non plus que devant, pour soutenir*

1. *La livre* : ancienne mesure de poids valant 489 *grammes*.

le poids E, que de la force qu'il faut pour soutenir 100 *livres, à cause que le clou qui est vers A y fait le même office que l'homme que nous y supposions auparavant. Enfin, posons que cet homme qui est vers C tire la corde pour faire hausser le poids E ; il est évident que, si il y emploie la force* (ici, le mot force est employé pour le mot travail) *qu'il faut pour lever* 100 *livres à la hauteur de* 2 *pieds*[1], *il fera hausser ce poids E, qui en pèse* 200, *de la hauteur de* 1 *pied, car la corde ABC étant doublée comme elle l'est, on la doit tirer de* 2 *pieds par le bout C pour faire autant hausser le poids E que si deux hommes la tiraient, l'un par le bout A et l'autre par le bout C, chacun de la longueur de* 1 *pied seulement* ».

1. *Le pied :* ancienne mesure de longueur valant 32,4 *centimètres*.

Théorème des travaux virtuels. Application à l'équilibre des machines simples.

I. THÉORÈME DES TRAVAUX VIRTUELS

1. Définitions.

1° ***Forces de liaison. Forces directement appliquées.***

Nous avons défini ce qu'on entendait par *corps solide gêné*. Pratiquement un tel corps est mobile autour d'un point ou d'un axe fixe, ou il repose sur un plan ou sur une surface fixe. On dit encore qu'*il est assujetti à des liaisons*.

Considérons le cas d'un solide mobile autour d'un point fixe O et soumis à certaines forces parmi lesquelles son poids (fig. 1).

La réduction de ces forces en O donne, en général, un couple et une résultante. La résultante, seule, est équilibrée par la réaction R du point O. On dit que cette réaction est une *force de liaison* et que les forces F_1, F_2, P sont des *forces directement appliquées*.

Si le corps est mobile autour d'un axe fixe, les forces de liaison sont les réactions des paliers.

De même, si le corps reste en contact avec un plan fixe, les forces de liaison sont les réactions de ce plan.

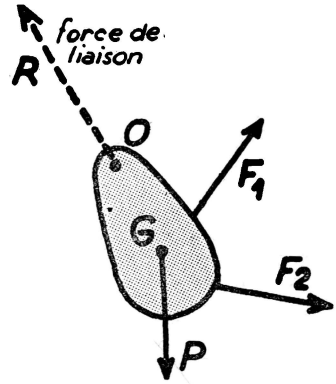


Fig. 1. — Le corps est mobile autour du point fixe O. La réaction R du point fixe est une *force de liaison.*

2° ***Déplacement virtuel. Travail virtuel.***

Considérons une sphère *assujettie à rester en contact avec un plan* (fig. 2).

Les déplacements qu'on peut lui imprimer sont de deux sortes :

1° si *la sphère se déplace sur le plan,*

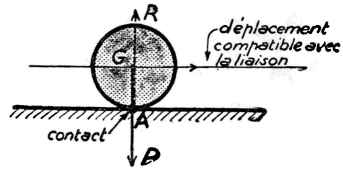


Fig. 2. — La force de liaison est la réaction R du plan. Lorsque la sphère roule sur ce plan, le déplacement est dit *compatible avec la liaison.*

le contact étant conservé on dit que le déplacement est *compatible avec la liaison.*

2° si *la sphère quitte le plan,* le déplacement est dit *incompatible avec la liaison;*

D'une manière générale, supposons qu'un corps solide, assujetti à certaines liaisons, soit en équilibre sous l'action des *forces directement appliquées* et des *forces de liaison.* ***Pour détruire cet équilibre tout en conservant les liaisons, il faudrait adjoindre une ou plusieurs forces.*** Il en résulterait certains ***déplacements réels.***

Sans modifier ni le système des forces ***directement appliquées, ni les forces de liaison*** *qui assurent l'équilibre,* imaginons qu'on déplace le corps par la pensée de manière à conserver les liaisons actuelles. Un tel déplacement fictif est alors dit ***virtuel.***

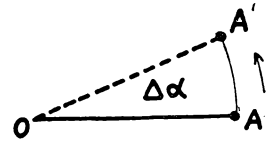


Fig. 3. — L'angle $\Delta\alpha$ étant exprimé en radians, l'arc $\overset{\frown}{AA'}$ vaut : $R \times \Delta\alpha$ radians.

Au cours de ce déplacement, les forces directement appliquées et les forces de liaison engendrent des travaux que nous appellerons ***travaux virtuels.***

REMARQUE. — Les déplacements virtuels que l'on envisage en mécanique sont généralement petits.

Dans le cas d'une translation, nous désignerons un tel déplacement par Δh ou Δx.

Dans le cas d'une rotation, $\Delta\alpha$ représentera l'angle de rotation (fig. 3). Il en résulte que, si cet angle est exprimé en radians, l'arc virtuel très petit $\overset{\frown}{AA'}$, décrit par un point mobile situé à la distance R de l'axe de rotation, vaut :

$$\overset{\frown}{AA'} = 2\pi R \times \frac{\Delta\alpha}{2\pi} = R \times \Delta\alpha.$$

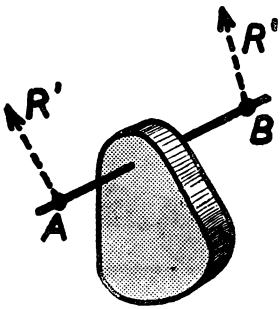


Fig. 4. — Le corps mobile a deux points fixes A et B. Les forces de liaison sont appliquées en ces points. Pour toute rotation autour de AB, le travail des forces de liaison est nul.

2. Travail des forces de liaison dans un déplacement réel ou virtuel.

THÉORÈME. — ***Pour tout déplacement réel ou virtuel compatible avec les liaisons, les travaux des forces de liaison sont nuls si l'on néglige les frottements.***

1er ***Cas.*** — *Le corps solide a un point fixe* O (fig. 1).

La réaction R ou force de liaison est appliquée en ce point. Le seul déplacement possible est une rotation autour de O. Le travail correspondant de la force R est nul puisque son point d'application reste fixe.

2e ***Cas.*** — *Le corps solide a deux points*

fixes, c'est-à-dire qu'il est assujetti à tourner autour de l'axe passant par ces points (fig. 4).

Les forces de liaison sont appliquées en A et B. Leurs travaux sont nuls pour toute rotation autour de AB puisque leurs points d'application A et B restent fixes.

3e Cas. — Le corps solide se déplace sur une surface fixe (fig. 5).

Les forces de liaison sont *normales* à la surface. Pour tout déplacement compatible avec les liaisons, leur point d'application se déplace sur cette surface. Leur travail est donc nul.

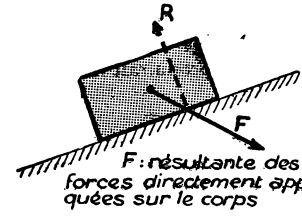


Fig. 5. — Le corps est posé sur un plan fixe. Les forces de liaison sont *normales* à ce plan et ont une certaine résultante R. Pour tout glissement sur le plan le travail des forces de liaison est nul.

3. Théorème des travaux virtuels.

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un corps solide (ou qu'un système de corps solides) soit en équilibre, est que, pour tout déplacement virtuel compatible avec les liaisons, la somme algébrique des travaux des forces directement appliquées soit nulle.

DÉMONSTRATION. — 1° ***La condition est nécessaire***, c'est-à-dire que si le corps est en équilibre, la somme des travaux des forces directement appliquées est nulle pour tout déplacement virtuel compatible avec les liaisons.

En effet, si le corps est en équilibre, le système de toutes les forces qui agissent sur lui et qui comprennent :

— les forces directement appliquées;

— les forces de liaison;

est en équilibre. Ce système a donc une résultante nulle et un couple résultant nul.

Donc, pour tout déplacement compatible avec les liaisons, le travail de la résultante est nul, ainsi que celui du couple résultant. Par suite, *la somme des travaux de toutes les forces qui agissent sur le solide est nulle.*

Or, la somme A' des travaux des forces de liaison est nulle; par suite, la somme A des travaux des forces directement appliquées est nulle aussi.

2° ***La condition est suffisante***, c'est-à-dire que si, pour tout déplacement virtuel compatible avec les liaisons, la somme A des travaux des forces directement appliquées est nulle, le corps est en équilibre.

Désignons par (S) le système des *forces directement appliquées.*

— (S') — *forces de liaison.*

Si le corps n'était pas en équilibre sous l'action de toutes ces forces, il se mettrait

en mouvement ; pour un petit *déplacement réel* d, le système (S) produirait un certain travail A.

Or, nous pourrions tenir le corps en équilibre en lui appliquant, en outre de (S) et de (S'), un système de forces auxiliaires (S_a) qui *s'opposerait au mouvement.* On aurait (S) + (S') + (S_a) équivalent à zéro.

Si maintenant nous donnions au corps un *déplacement virtuel* identique au déplacement réel d considéré plus haut,

(S) produirait le même travail que précédemment : A,
(S') — un travail nul,
(S_a) — un certain travail A_a.

La somme de tous ces travaux serait nulle : $A + A_a = 0$.

Mais A_a serait nécessairement négatif, puisque le système (S_a) *s'opposerait au déplacement.* Donc A *serait nécessairement positif :* ce qui est contraire à l'hypothèse.

II. APPLICATION A L'ÉQUILIBRE DES MACHINES SIMPLES

Dans ce qui suit, nous allons retrouver, en appliquant le théorème des travaux virtuels, les relations d'équilibre établies en Statique.

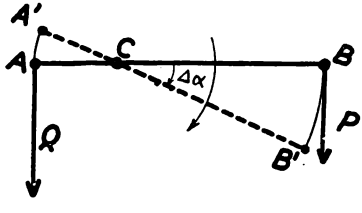


Fig. 6. — Appliquez le *théorème des travaux virtuels* au levier.

4. Équilibre du levier.

Soit un levier AB (dont nous supposerons le poids négligeable) en équilibre sous l'action des forces directement appliquées P et Q perpendiculaires à AB (fig. 6).

Pour une rotation virtuelle très petite $\Delta\alpha$, A vient en A' et B en B'. Si nous admettons que les forces P et Q demeurent perpendiculaires à AB, les arcs $\overset{\frown}{AA'}$ et $\overset{\frown}{BB'}$ sont sensiblement confondus avec la direction de ces forces.

Or : $\overset{\frown}{AA'} = CA \times \Delta\alpha$ et $\overset{\frown}{BB'} = CB \times \Delta\alpha$.

Le travail de la force P est positif et a pour valeur : $P \times CB \times \Delta\alpha$; celui de la force Q est négatif et a pour valeur : $-(Q \times CA \times \Delta\alpha)$.

Appliquons le théorème du travail virtuel :

$$P \times CB \times \Delta\alpha - Q \times CA \times \Delta\alpha = 0$$

d'où : $P \times CB = Q \times CA$.

Nous retrouvons ainsi une relation bien connue.

5. Équilibre du treuil.

Les forces directement appliquées sont (fig. 7) : F la force tangentielle, Q le poids de la charge.

Pour une rotation virtuelle $\Delta\alpha$, la charge monte d'une quantité Δh.

Le théorème des travaux virtuels donne :

$$F \times OA \times \Delta\alpha - Q \times \Delta h = 0$$

Or, Δh est égal à la longueur de corde enroulée sur le tambour pour la rotation considérée.

On a donc : $\Delta h = \overset{\frown}{BB'} = r \times \Delta\alpha$.

Par suite :

$$F \times OA \times \Delta\alpha - Q \times r \times \Delta\alpha = 0.$$

D'où : $F \times OA = Q \times r$

ou si l'on pose $OA = l$: $F \times l = Q \times r$.

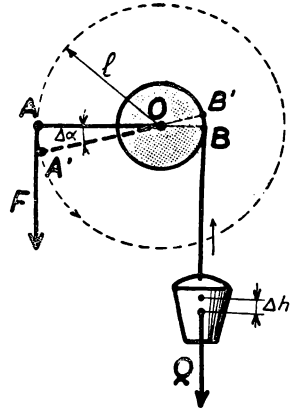


Fig. 7. — Appliquez ce même théorème au treuil.

6. Équilibre sur le plan incliné.

Les forces directement appliquées sont (fig. 8) : F l'effort de traction; P le poids du corps.

Pour un déplacement rectiligne Δx, parallèle au plan incliné et dirigé vers le haut, G vient en G' et A en A'.

$$GG' = AA' = \Delta x.$$

Le travail de la force P est négatif et est égal à : $- P \sin\alpha \times \Delta x$.

Celui de la force F est positif et a pour valeur : $F \cos\beta \times \Delta x$.

Appliquons le théorème du travail virtuel :

$$F \cos\beta \times \Delta x - P \sin\alpha \times \Delta x = 0.$$

D'où $F \cos\beta = P \sin\alpha$.

En particulier, si $\beta = 0$, $\cos\beta = 1$ et : $F = P \sin\alpha$.

Ce que nous avons déjà trouvé par un autre procédé.

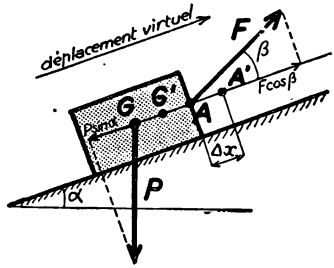


Fig. 8. — Appliquez le théorème des travaux virtuels au corps posé sur le plan incliné.

7. Équilibre d'une vis.

Soient F l'effort tangentiel sur la broche, Q le poids de la charge à soulever (fig. 9).

Pour une rotation virtuelle $\Delta\alpha$ de la broche, la charge Q monte d'une quantité Δh et le travail du poids Q est négatif. Au contraire, le travail de la force F est positif.

Appliquons le théorème du travail virtuel :

$$F \times R \times \Delta\alpha - Q \times \Delta h = 0. \qquad (1)$$

Or, Δh est proportionnel à l'angle de rotation $\Delta\alpha$. Ce dernier étant exprimé en radians, pour un tour de la broche qui correspond à un angle de 2π radians, la vis monte d'une quantité égale au pas p. On a donc :

$$\frac{\Delta h}{\Delta\alpha} = \frac{p}{2\pi}, \quad \text{d'où :} \quad \Delta h = p\,\frac{\Delta\alpha}{2\pi}.$$

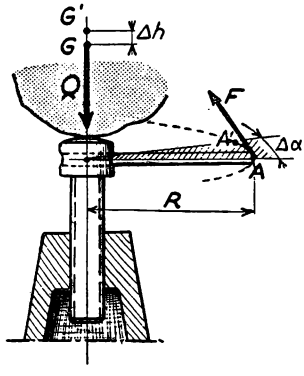


Fig. 9. — Appliquez encore le théorème des travaux virtuels au vérin à vis.

En remplaçant cette valeur dans l'égalité (1) on obtient :

$$F \times R \times \Delta\alpha - Q \times p\,\frac{\Delta\alpha}{2\pi} = 0.$$

Soit :

$$F \times R = \frac{Q \times p}{2\pi} \quad \text{ou} \quad F = Q \times \frac{p}{2\pi R}.$$

Nous reconnaissons la condition d'équilibre établie lors de l'étude des machines simples. Elle ne tient pas compte du frottement des filets de vis les uns sur les autres. Il faut en réalité exercer une force F plus grande que celle donnée par la formule pour faire monter la charge Q.

Résumé.

1. Lorsqu'un corps est soumis à des liaisons, à celles-ci correspondent des forces de liaison.
On appelle déplacement virtuel compatible avec les liaisons tout déplacement fictif qui ne modifie pas la nature de ces liaisons.

2. Abstraction faite du frottement, les travaux des forces de liaison sont nuls pour tout déplacement compatible avec les liaisons.

3. *Théorème du travail virtuel : La condition nécessaire et suffisante pour qu'un corps ou un système de corps soit en équilibre, est que la somme algébrique des travaux des forces directement appliquées soit nulle pour tout déplacement virtuel compatible avec les liaisons.*

Ce théorème permet d'établir les conditions d'équilibre des machines simples.

Exercices.

1. Appliquer le théorème des travaux virtuels à l'équilibre des machines simples suivantes :

a) Poulie fixe et poulie mobile,

b) Palan de Weston.

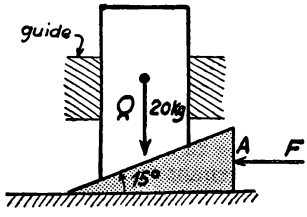


Fig. 10.

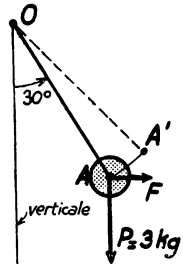


Fig. 11.

2. On considère le dispositif de la figure 10. Quelle force F faut-il faire agir au point A pour maintenir l'équilibre?

3. Même question pour le dispositif de la figure 11.

Force centrifuge. Son expression.

1. Existence de la force centrifuge.

Expérience 1. — Dans un plan vertical, faisons tourner une pierre attachée à une corde (fig. 1). Nous constatons que la corde est d'autant plus tendue que la pierre est plus lourde et qu'elle tourne plus vite. La force avec laquelle elle tire sur la corde est dite *force centrifuge*.

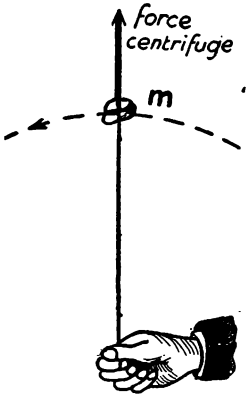


Fig. 1. — La ficelle demeure tendue lorsqu'on fait tourner la pierre. La pierre *tire* sur la ficelle (force centrifuge).

Expérience 2. — Si nous répétons l'expérience avec un seau contenant de l'eau, l'eau ne tombe pas, même lorsque le seau est au point le plus haut de sa course, donc complètement renversé. C'est la force centrifuge qui l'applique contre le fond.

Expérience 3. — Lorsqu'un cycliste tourne dans un virage, il s'incline instinctivement vers l'intérieur de la courbe pour vaincre la force centrifuge qui tend à le faire basculer vers l'extérieur (fig. 2).

Cherchons l'explication de ces phénomènes.

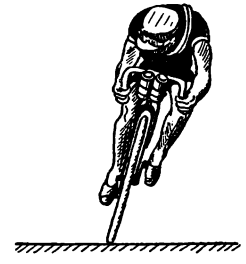


Fig. 2. — Dans le virage le cycliste se penche vers l'intérieur de la courbe.

2. Force centripète.

Soit un point matériel A, de masse m, animé d'un *mouvement circulaire uniforme* (fig. 3).

Ce point est, par exemple, matérialisé par une bille d'acier fixée à un cordonnet. Rappelons qu'il possède une accélération centripète dont la valeur :

$$\gamma = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$$

C'est donc qu'une force f' agit sur lui.

Cette force a même direction que l'accélération qu'elle imprime au mobile : elle est ***centripète.***

Son intensité est donnée par la formule fondamentale de la dynamique :

$$f' = m\gamma.$$

Elle donc pour valeur : $f' = \frac{mv^2}{R}$ ou $f = m\omega^2 R$.

Elle est appliquée sur la bille par la corde qui la tire constamment vers le centre de rotation.

Dans l'expérience du seau plein d'eau, c'est le fond qui exerce sur le liquide la force centripète nécessaire à le maintenir sur une trajectoire circulaire.

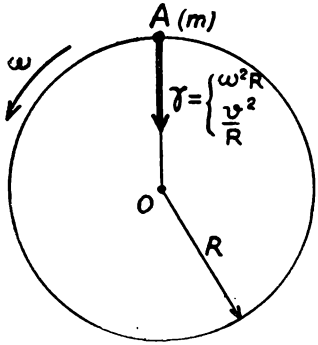


Fig. 3. — Un point matériel animé d'un mouvement de rotation uniforme a une accélération centripète $\gamma = \omega^2 R = \frac{v^2}{R}$

A cette accélération correspond une force : c'est la *force centripète.*

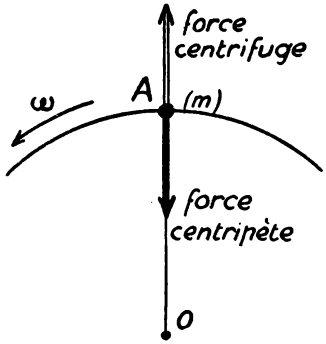


Fig. 4. — La corde tire sur la pierre *(force centripète)* ; en vertu du principe d'égalité de l'action et de la réaction, la pierre tire sur la corde avec une force égale et directement opposée *(force centrifuge).*

3. Force centrifuge.

D'après le principe d'égalité de l'action et de la réaction, si la corde exerce sur la bille une force centripète, *la bille exerce sur la corde une action égale et opposée à la force centripète :* c'est la ***force centrifuge*** (fig. 4).

Celle-ci a donc même grandeur que la force centripète, soit :

$$f = \frac{mv^2}{R} \qquad \text{ou} \qquad f = m\omega^2 R$$

Sous cette seconde forme, on voit que la force centrifuge est proportionnelle :

à la masse *m*,

au carré de la vitesse angulaire ω,

à la distance R du point A à l'axe de rotation.

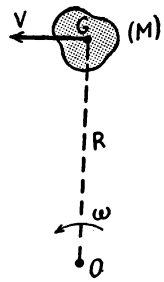


Fig. 5. — Pour un corps de masse M, la force centrifuge a même valeur que si toute la masse était concentrée au centre de gravité G.

REMARQUE. — Dans le cas où le corps tournant n'est plus assimilable à un point matériel, à chacun de ses éléments correspond une force centrifuge (fig. 5).

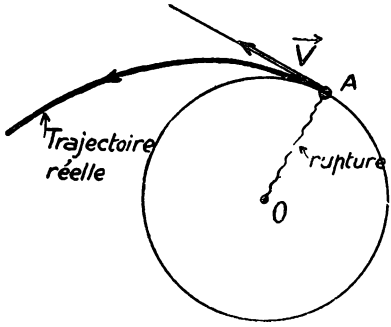


Fig. 6. — En A la ficelle se casse : il n'y a plus ni force centripète, ni force centrifuge. La pierre part tangentiellement à la circonférence puis sa trajectoire devient parabolique. Pourquoi?

Soient M la masse totale du corps,
R la distance du centre de gravité G à l'axe de rotation,
ω la vitesse angulaire.

On démontre que l'action de la force centrifuge est la même que si toute la masse était concentrée au centre de gravité.

$$F = M\omega^2 R.$$

Si V est la *vitesse linéaire du point G,* cette expression peut encore s'écrire :

$$F = M \frac{V^2}{R}.$$

Ces formules donnent la valeur de l'action centrifuge, mais non son point d'application. On peut admettre que ce point est confondu avec le centre de gravité, si R est grand par rapport aux dimensions du corps.

4. Application numérique.

Une bille pesant 20 *grammes, distante de* 0,50 *m de l'axe de rotation, fait* 2 *tours par seconde. Calculer la force centrifuge qui la sollicite.*

La force centrifuge est : $f = m\omega^2 R$.

Employons le système d'unités des mécaniciens (MKS) :

$$M = \frac{P}{g} = \frac{0{,}02}{9{,}81}$$

$$R = 0{,}50\ m$$

$$\omega = 2 \times 2\pi\ \ r/s$$

Donc : $f = \frac{0{,}02}{9{,}81} \times 16\pi^2 \times 0{,}5.$

Comme $\pi^2 = 9{,}87$ on peut écrire :

$$f \simeq 0{,}02 \times 16 \times 0{,}5 = \boldsymbol{0{,}160\ kgp}$$

Si la vitesse de rotation augmente, la force centrifuge croît comme le carré de cette vitesse et peut être suffisante pour rompre la corde.

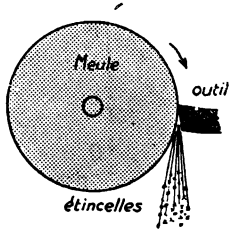


Fig. 7. — Lorsque vous affûtez un outil, observez les parcelles de métal en fusion.

5. Que se passe-t-il quand la force centripète cesse d'agir ?

Imaginons qu'au cours de la rotation la corde

qui maintient la bille se casse. La force centripète disparaît ainsi que la force centrifuge qui lui est constamment égale et opposée.

D'après le principe de l'inertie, la bille prend alors un mouvement rectiligne uniforme, tangent à la trajectoire au point correspondant à la rupture (fig. 6).

En réalité, la bille est toujours soumise à l'action de son poids : elle devient un projectile lancé dans l'espace et sa trajectoire est parabolique.

Des trajectoires sensiblement rectilignes peuvent être observées lors de l'affûtage d'un outil sur la meule (fig. 7).

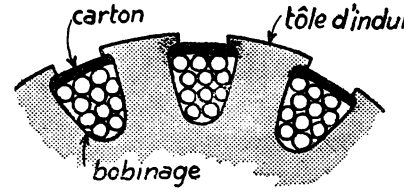


Fig. 8, — Pourquoi est-il nécessaire de *sertir* les bobinages d'un induit de moteur électrique?

6. Quelques effets de la force centrifuge.

1. Sur une roue de bicyclette, dès que l'adhérence des gouttes d'eau ou de boue est inférieure à la force centrifuge qui les sollicite, ces gouttes se détachent tangentiellement au pneu et décrivent des trajectoires sensiblement paraboliques. Les garde-boue remédient à ces inconvénients.

2. Les meules d'affûtage, les lapidaires, les roues gyroscopiques, tournent à grande vitesse. Chacun des éléments qui constituent ces corps est soumis à la force centrifuge. Celle-ci peut être assez grande pour déterminer une rupture. La loi exige l'emploi d'appareils de protection dont le but est d'éviter des accidents parfois très graves dus aux éclatements.

Des accidents du même genre sont à redouter lorsqu'un volant s'emballe.

3. Les enroulements des induits de dynamos, dans leurs encoches, doivent être sertis, car la vitesse de rotation est généralement élevée (fig. 8).

4. La force centrifuge agit également sur toutes les particules de la courroie qui s'enroule sur une poulie en mouvement. La courroie tend alors à s'écarter de la poulie. Il faut en tenir compte lors de l'établissement de la transmission, si la vitesse dépasse 15 *m/s*.

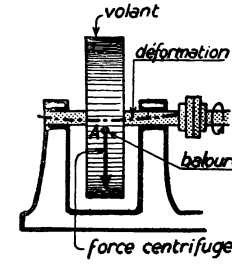


Fig. 9. — Sous l'effet du *balourd*, l'arbre se déforme au cours de la rotation.

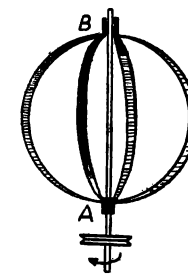


Fig. 10. — Lorsque l'arbre tourne, les cerceaux s'aplatissent. Pourquoi?

5. Lorsqu'un volant présente un balourd (fig. 9), la force centrifuge qui le sollicite tire sur l'arbre du volant et provoque une usure rapide des paliers.

6. Sur une roue d'automobile, la force centrifuge qui sollicite les particules du pneu croît avec la vitesse. Le caoutchouc s'allonge et le diamètre du pneu augmente.

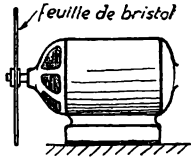


Fig. 11. — Lorsqu'elle tourne rapidement la feuille de bristol devient assez rigide pour scier une plaquette de bois contreplaqué.

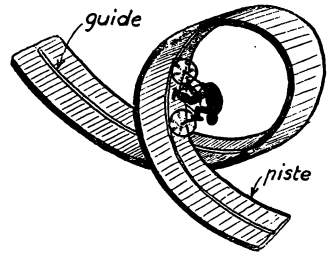


Fig. 13. — Pourquoi ce cycliste demeure-t-il constamment sur la piste ?

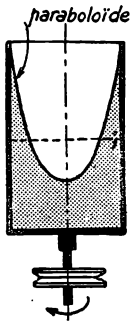


Fig. 12. — Lors de la rotation le liquide se creuse au centre et forme un paraboloïde de révolution. Avec du mercure on obtiendrait un miroir parabolique

Fig. 14. — Le motocycliste se meut dans un panier de forme sphérique. La force centrifuge l'applique constamment sur la paroi.

7. Les voitures automobiles sont souvent animées, aux grandes vitesses, d'un mouvement désagréable : le chimmy. Ce dernier paraît être amorcé par la masse excentrée de la valve de la chambre à air.

8. L'appareil de la figure 10 se compose de quatre lames minces d'acier solidaires de deux manchons. L'un A est fixe sur l'arbre, l'autre B peut coulisser sur lui. Pendant la rotation, le manchon B se rapproche de A.

Cette expérience décèle la cause de l'aplatissement de la Terre.

9. Sur l'induit d'un petit moteur électrique, fixons un manchon portant une feuille de bristol (fig. 11). Faisons tourner le moteur. La force centrifuge donne à la feuille une rigidité suffisante pour qu'il soit possible de scier une planchette de contreplaqué de quelques millimètres d'épaisseur.

10. Faisons tourner rapidement autour de son axe un vase contenant de l'eau (fig. 12). Le liquide se creuse au centre et sa surface devient un paraboloïde de révolution. La force centrifuge en est la cause. Si la vitesse croît, le liquide s'échappe du récipient.

11. Nous retrouvons l'effet de la force centrifuge dans certaines attractions foraines telles que le looping (fig. 13), les manèges d'avions, la ronde infernale (fig. 14).

Résumé.

1. Lorsqu'un point matériel de masse m est animé d'un mouvement circulaire uniforme, il est soumis à une force centrifuge qui tend à l'écarter de l'axe de rotation. Cette force a pour expression :

$$f = m\,\omega^2\,R \qquad \text{ou} \qquad f = m\,\frac{v^2}{R}$$

ω : vitesse angulaire; R : rayon de la trajectoire; v : vitesse linéaire.

2. Lorsqu'un corps de masse M tourne autour d'un axe d'un mouvement circulaire uniforme, il est sollicité par une force centrifuge :

$$F = M\,\omega^2\,R \qquad \text{ou} \qquad F = M\,\frac{V^2}{R}$$

ω : vitesse angulaire.
R : distance en M du centre de gravité G à l'axe de rotation.
V : vitesse linéaire du point G.
On peut admettre que cette force est appliquée en G si R est grand par rapport aux dimensions du corps.

3. L'action de la force centrifuge explique certains phénomènes : rupture des corps tournant à grande vitesse, glissement des courroies de transmission, etc.

Exercices.

1. Dans un tube horizontal mobile autour d'un axe fixe, on place une bille d'acier (fig. 15).

Que se passe-t-il lorsqu'on fait tourner le tube?

(Cette expérience est à la base du principe de fonctionnement des ventilateurs, pompes centrifuges).

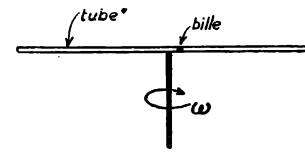


Fig. 15.

2. On accroche un poids de fonte pesant 1 *kg* à l'extrémité d'un fil d'acier. Le rayon de la circonférence décrite par le point G est de 0,60 *m*, la vitesse de rotation est de 3 *tours par seconde*.

1° Quelle est l'intensité de la force centrifuge qui sollicite le poids?

2° Un fil d'acier identique au précédent se rompt sous une charge de 60 *kg*. Quelle est la vitesse de rotation qui provoque la rupture.

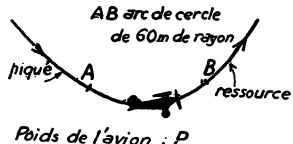


Fig. 16.

3. On fait tourner un seau contenant 3 litres d'eau. Le rayon R est de 0,90 *m*. Quelle doit être la vitesse de rotation pour que l'eau ne tombe pas lorsque le seau est au point le plus haut?

4. Une manivelle motrice a son centre de gravité situé à 160 *mm* de l'axe de rotation. Quelle est la force centrifuge qui la sollicite lorsque la vitesse de rotation est de 240 *tr/mn?* (Poids de la manivelle : 15 *kg*.)

5. Dans un piqué suivi de ressource (fig. 16), un avion décrit un arc de 60 *mètres* de rayon qu'il aborde à la vitesse de 180 *km/h*. Calculer, en fonction de son poids P, la force centrifuge qui le sollicite.

6. Une sphère a 4 *m* de diamètre. Quelle vitesse minima doit prendre l'acrobate motocycliste roulant à l'intérieur de cette sphère, pour que, dans la position la plus défavorable, son poids soit équilibré par la force centrifuge? (Poids de l'homme et de sa machine : 140 *kg*).

Quelques applications de la force centrifuge.

1. Régulateur centrifuge.

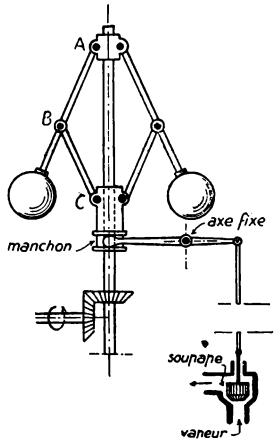


Fig. 1. — *Régulateur de Watt.* Expliquez comment il fonctionne.

Le régulateur centrifuge (fig. 1) ou régulateur de Watt est employé pour régler l'admission de vapeur dans un cylindre de machine à vapeur.

L'appareil est établi pour qu'en marche normale les sphères occupent une certaine position d'équilibre.

Si sa vitesse de rotation augmente, la force centrifuge écarte davantage les boules. Le manchon se soulève et fait déplacer des leviers qui ferment la soupape d'admission de la vapeur. La machine ralentit, les sphères s'abaissent et la soupape s'ouvre à nouveau. La vitesse de l'arbre moteur oscille entre deux limites bien déterminées pour un régulateur donné.

2. Séparateurs centrifuges.

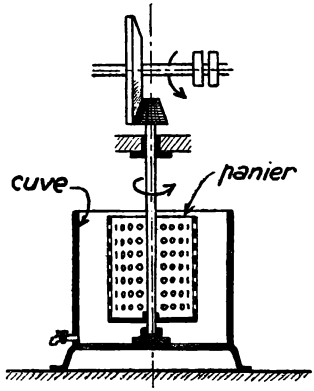


Fig. 2 — *Essoreuse.* A quoi sert-elle?

La figure 2 représente une essoreuse. Si l'on place dans le panier un linge mouillé, l'eau est projetée vers l'extérieur lorsque l'arbre tourne rapidement.

D'une manière identique on sépare :

— le sucre cristallisé de la mélasse qui l'imprègne à la sortie des chaudières de concentration;

— l'huile des copeaux métalliques (récupération des huiles).

D'autres appareils centrifuges, basés sur un principe analogue, permettent de séparer d'une façon continue deux liquides de densités différentes (écrémeuses); d'éliminer les particules en suspension dans un liquide (clarification des vins, des collodions dans la soie artificielle, épuration des huiles).

3. Ventilateurs et pompes centrifuges.

Considérons le schéma d'une pompe centrifuge (fig. 3).

L'enveloppe formant le corps de pompe étant pleine d'eau, on fait tourner rapidement la roue. Ses aubes entraînent le liquide et le rejettent vers la périphérie. Il en résulte une dépression au centre de la roue qui provoque la montée du liquide dans la conduite d'aspiration.

Le principe du fonctionnement du ventilateur est identique au précédent.

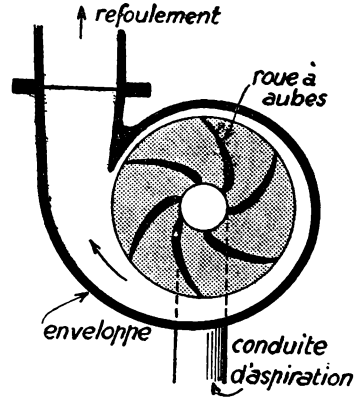


Fig. 3. — Schéma d'une *pompe centrifuge.*

4. Coulée centrifuge. Régulage des bielles.

La coulée centrifuge permet de réaliser dans des lingotières des ébauches de tubes destinés à la fabrication des tubes sans soudure. Elle constitue aussi l'un des procédés de fabrication des tuyaux de fonte (fig. 4).

Le régulage des bielles de moteur à explosions en est une variante (fig. 5).

La coulée centrifuge permet d'obtenir des produits particulièrement homogènes.

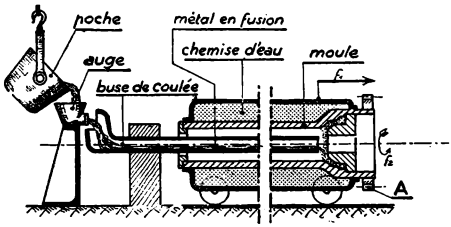


Fig. 4. — *Coulée centrifuge* d'un tuyau.

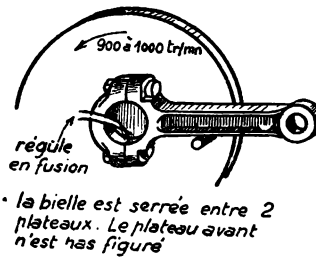


Fig. 5. — *Régulage centrifuge* d'une bielle?

5. Embrayages automatiques.

L'embrayage centrifuge de la figure 6 comprend :

1° un manchon entraîneur M claveté sur l'arbre moteur;

2° deux masses d'entraînement *m* articulées sur le manchon;

3° deux ressorts de rappel *r;*

4° une poulie P clavetée sur l'arbre récepteur.

Au repos ou en marche ralentie, les masses, maintenues à la position de débrayage par les ressorts antagonistes, n'ont aucun contact avec la poulie et ne peuvent l'entraîner.

Quand la vitesse du moteur augmente, les masses d'entraînement, sollicitées par la force centrifuge, s'écartent de la position précédente et viennent petit à petit en contact avec le limbe intérieur de la poulie.

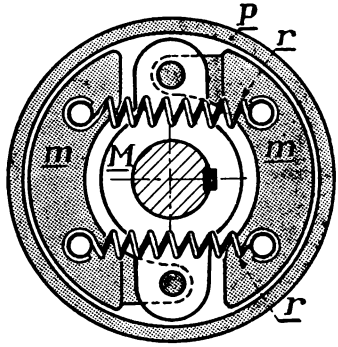


Fig. 6. — *Embrayage centrifuge.* Expliquez en quoi consiste l'automatisme de cet embrayage.

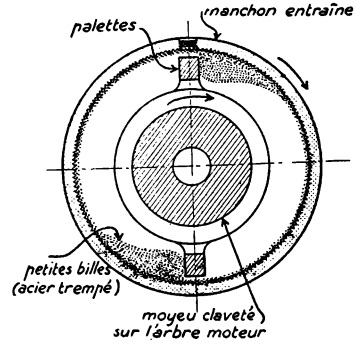


Fig. 7. — *Embrayage Pulvis-Citroën.* Décrivez-le et expliquez comment il fonctionne.

Après un léger glissement, l'entraînement a lieu progressivement. Quand l'arbre moteur s'arrête ou ralentit par trop, les masses décollent et le débrayage se produit.

L'embrayage *Pulvis-Citroën* est d'un type différent. La figure 7 en donne le détail.

Lorsque le moteur démarre, les palettes entraînent les billes qui sont soumises à une force centrifuge croissante. La grenaille s'accumule en deux talus sur une couche périphérique de billes emboîtées dans des alvéoles. Lorsque la force centrifuge est suffisante, les billes s'arc-boutent et entraînent la couronne. Si pour une cause accidentelle la résistance de la machine entraînée croît, les talus glissent et la transmission se trouve protégée.

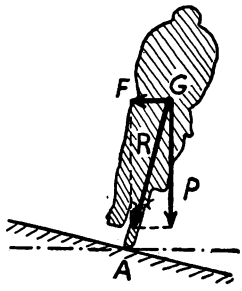


Fig. 8. — La résultante R doit être normale au plan de roulement pour éviter le dérapage. D'où la nécessité de *relever le virage.*

6. Relèvement des virages.

Lorsqu'un cycliste aborde un virage, il s'incline instinctivement de telle sorte que la résultante R de son poids P et de la force centrifuge F qui le sollicitent passe par A (fig. 8).

Si R est trop inclinée sur le sol, les pneus dérapent et le cycliste tombe.

Pour éliminer le risque de dérapage, il faut que la résultante R soit perpendiculaire au sol.

PROBLÈME. — *Une automobile pesant* 1 000 *kilo-*

grammes a une vitesse de 15 mètres par seconde. Elle aborde un virage dont le rayon moyen est de 40 mètres.

1° *Quelle est la force centrifuge qui la sollicite?*

2° *De combien faut-il relever le virage pour que la résultante du poids et de la force centrifuge soit normale au plan?*

SOLUTION. — 1° Dans la formule $F = M \frac{V^2}{R}$, calculons les valeurs numériques des quantités qui figurent dans le second membre, en utilisant le *système d'unités des mécaniciens* (MKS).

$$M = \frac{P}{g} = \frac{1\,000}{9{,}81}$$

$$V^2 = 15^2 = 225$$

$$R = 40\ m$$

On trouve : $F = \frac{1\,000}{9{,}81} \times \frac{225}{40} =$ ***573 kilogrammes.***

Cette force est horizontale, normale à la trajectoire, dirigée vers l'extérieur.

2° *Angle α du virage* (fig. 9).

Tracons sur la figure les forces composantes qui sont rectangulaires, puis leur résultante R.

Le *profil en travers* de la route doit être perpendiculaire à R. L'angle qu'il fait avec le plan horizontal est donc égal à l'angle α de R avec P.

Dans le triangle rectangle GAB :

$$\frac{AB}{GA} = \text{tg } \alpha = \frac{573}{1\,000} = 0{,}573.$$

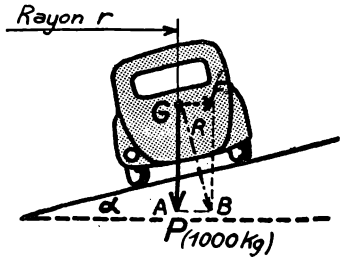


Fig. 9.

Les tables de trigonométrie donnent pour l'angle α la valeur :

$$\alpha = 29°50' \text{ soit : } 30° \text{ sensiblement}$$

REMARQUE 1. — La résultante R a pour valeur :

$$R = \sqrt{P^2 + F^2}.$$

Soit :

R = 1 152 kilogrammes.

La voiture appuie donc sur le sol du virage plus qu'elle n'appuie sur le sol de la route en ligne droite.

REMARQUE 2. — On conçoit que toute autre voiture roulant plus vite dans le même virage, aura

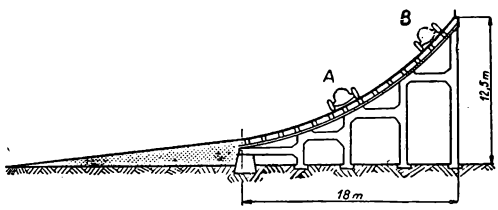


Fig. 10. — *Profil de l'autodrome de Montlhéry.* L'automobile B va beaucoup plus vite que l'automobile A; elle doit rouler vers l'extérieur de la piste.

tendance à glisser vers l'extérieur de la courbe, car la force centrifuge est plus élevée et la résultante R s'incline sur le plan de roulement. C'est pourquoi le profil d'un virage bien établi n'est pas rectiligne mais relevé vers l'extérieur.

Sur les pistes d'autodromes, les voitures les plus rapides roulent dans la région la plus inclinée (fig. 10).

REMARQUE 3. — Les voies de chemin de fer sont également relevées dans les virages. Le *dévers* de la voie est la différence de niveau de deux rails.

Résumé.

1. Les effets de la force centrifuge sont utilisés dans divers appareils industriels parmi lesquels :
— le régulateur de Watt,
— les séparateurs centrifuges,
— les ventilateurs et les pompes centrifuges,
— certains types d'embrayages.
La coulée centrifuge est un des procédés de fabrication des tuyaux de fonte et d'acier.

2. Sur les routes ou sur les voies de chemin de fer, le relèvement des virages a pour but de remédier aux dangers de la force centrifuge.

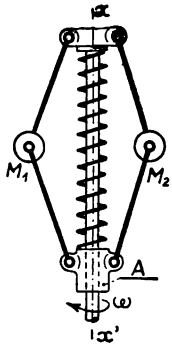


Fig. 11.

Exercices.

1. Le schéma de la figure 11 représente un régulateur centrifuge utilisé dans certains indicateurs de vitesse instantanée.

1° Etudier ce qui se passe lorsque l'ensemble tourne autour de l'axe $x'x$;

2° Le curseur commande une aiguille indicatrice établie de manière à amplifier les mouvements du curseur. Compléter le schéma;

3° Comment cet appareil peut-il servir à la mesure d'une vitesse de rotation?

2. Les pilotes d'avion spécialisés dans l'acrobatie exécutent deux sortes de loopings schématisés sur la figure 12.

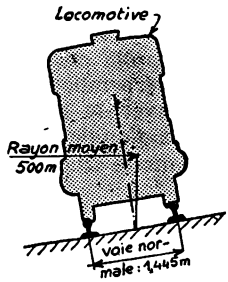


Fig. 13.

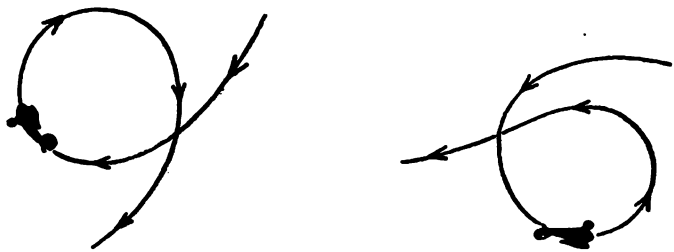


Fig. 12. : ***Loopings***

Examiner, dans les deux cas, l'action de la force centrifuge sur le pilote. Quelle précaution faut-il prendre dans le deuxième cas?

3. Une locomotive pesant 80 *tonnes* aborde une voie en courbe dont le rayon moyen est 500 *m*. Sa vitesse est de 72 *km/h* (fig. 13).

1° Quelle est la force centrifuge qui s'exerce sur la locomotive?

2° Quel dévers faut-il donner à la voie pour que la locomotive l'aborde sans danger ?

4. On considère le dispositif de la figure 14. L'axe *x'x* tourne à la vitesse de 120 *tr/mn*. Chaque sphère qui pèse 400 *g* est assimilée à un point matériel en équilibre *relatif* sous l'action du poids propre P, de la force centrifuge F et de l'action F_1 exercée en A par la tige AB dont le poids est négligeable

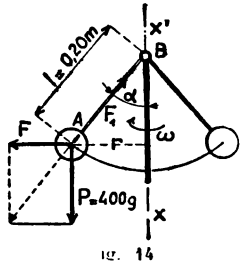


fig. 14

1° Montrer que l'angle α est donné par la relation : $\cos\alpha = \frac{g}{\omega^2 l}$ et calculer cet angle ;

2° Calculer l'intensité de la force F_1.

Équilibrage des corps tournants.

1. Modes d'action de la force centrifuge sur un corps tournant.

1° Considérons un vilebrequin de moteur à un seul coude (fig. 1). Les centres de gravité des flasques et du maneton sont respectivement aux points g_1, g_2, g_3, situés dans un même plan.

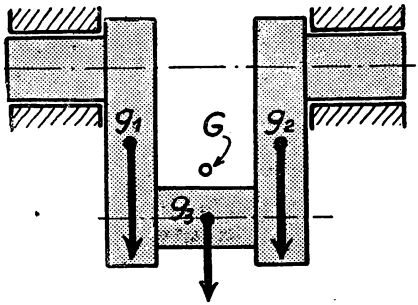


Fig. 1. — Dans ce cas les forces centrifuges se réduisent à une *force unique*, résultante des trois forces parallèles appliquées en g_1, g_2, g_3.

Les actions centrifuges qui sollicitent les masses de ces trois parties sont parallèles et de même sens et se réduisent à une *force unique* appliquée au centre G de gravité du vilebrequin. Cette force tire sur le coude perpendiculairement à l'axe de rotation.

2° De même, observons les effets de la force centrifuge sur un arbre à deux coudes (fig. 2) présentant une symétrie matérielle par rapport à un point de l'axe de rotation. Le centre de gravité G de l'arbre est en ce point.

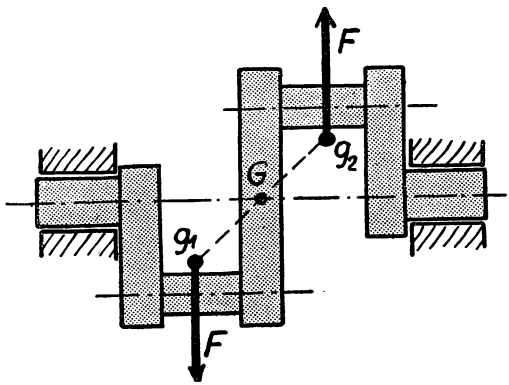


Fig. 2. — Ici, les forces centrifuges qui prennent naissance au cours de rotation se réduisent à un *couple*.

Soient :

g_1 le centre de gravité du 1er coude;

g_2 le centre de gravité du 2e coude.

Les forces centrifuges qui agissent en ces points perpendiculairement à l'axe de rotation sont parallèles, égales et de signes contraires. Elles forment un *couple* qui tend à faire fléchir le vilebrequin.

3° La force centrifuge peut donner lieu à la fois à *une force* et à *un couple*.

C'est le cas pour un vilebrequin presentant deux coudes inegaux (fig. 3)

La force F_1 appliquée en g_1 est équivalente à une force équipollente F' appliquée en g_2 et à un couple dont le moment est : $d \times F_1$.

Tout se passe comme si le vilebrequin était alors soumis à une force $(F_2 - F_1)$ et à un couple de moment $d \times F_1$.

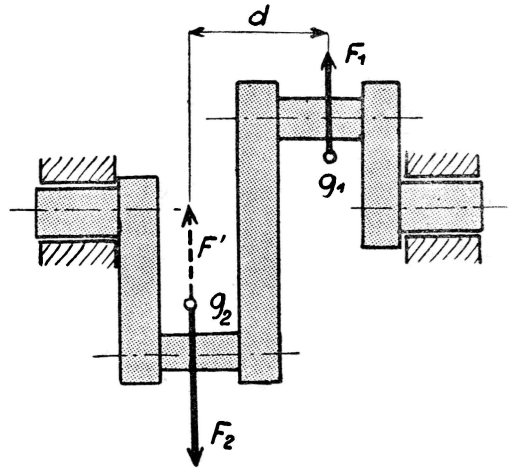


Fig. 3. — Les forces centrifuges se reduisent ic. a une *force* égale à $(F_2 - F_1)$ et à un *couple* de momen $d \times F_1$

CONCLUSION : Les actions centrifuges sur un corps tournant peuvent donc se réduire :

à une force unique,

à un couple ;

à une force et à un couple.

REMARQUE. — Une meule, un volant plein, un disque de turbine à vapeur, une roue, ont une epaisseur generalement petite par rapport au diamètre. Tout défaut d'homogénéité dans l'un de ces corps a pour effet de déplacer le centre de gravité qui n'est plus sur l'axe de rotation. On dit alors que le corps a du *balourd*.

Si les effets centrifuges se réduisent à un couple (fig. 4), on peut le négliger pratiquement, car son bras de levier *d* est nécessairement faible.

De même, si les effets centrifuges se réduisent a un couple et à une force F, le couple est négligeable pour la même raison que précédemment.

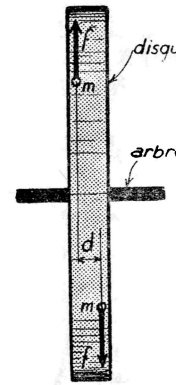


Fig. 4 — La distance *d* étant très faible, le moment du couple des forces centrifuges est négligeable

2. Nécessité de l'équilibrage.

PROBLÈME. — *Un vilebrequin pèse* 15 *kgp et tourne à raison de* 3 600 *tr/mn. Quelle serait la force centrifuge qui le solliciterait si le centre de gravité était excentré de* 0,5 *mm ?*

Nous avons vu que la force centrifuge qui sollicite le vilebrequin a

pour valeur : $F = M\omega^2 R$. Adoptons le système d'unités MKS.

$$M = \frac{15}{9{,}81}$$

$$\omega = \frac{\pi n}{30} = \frac{3{,}14 \times 3\,600}{30} = 376{,}8\ r/s$$

$$R = 0{,}5\ mm = 0{,}000\,5\ m$$

Par suite :

$$F = \frac{15 \times \overline{376{,}8}^2 \times 0{,}000\,5}{9{,}81} \simeq \textbf{\textit{108 kgp}}$$

La force centrifuge exerce donc une traction de 108 *kgp* perpendiculaire à l'axe de rotation.

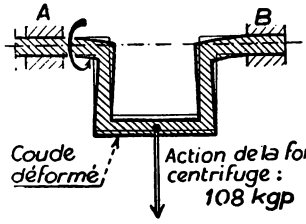


Fig. 5. — Sous l'effet de la force centrifuge l'arbre se déforme.

Elle détermine :

1° une déformation du vilebrequin (fig. 5);

2° des vibrations dans l'arbre qui se transmettent au bâti, vibrations qui altèrent la structure moléculaire du métal, donc sa résistance;

3° des poussées supplémentaires sur les paliers, d'où usure plus rapide des coussinets et accroissement des jeux.

Cet exemple nous montre l'importance des actions centrifuges sur un corps tournant à grande vitesse. C'est pourquoi un tel corps doit être équilibré.

3. Équilibrage d'un corps où les actions centrifuges se réduisent à une force unique : équilibrage statique.

1° ***Équilibrage d'un volant plein*** (fig. 6) :

Dans l'alésage de ce volant, on emmanche à la presse un bout d'arbre en acier très dur.

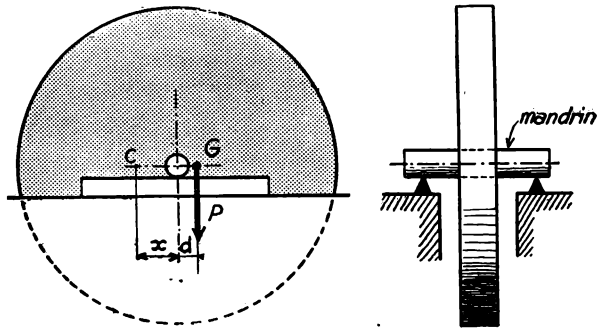


Fig. 6 — Pour équilibrer le volant on le pose sur deux règles triangulaires. S'il présente du *balourd*, il se met à tourner jusqu'à ce que le centre de gravité G soit le plus bas possible.

On fait reposer le volant sur deux règles triangulaires dont les arêtes sont dans un même plan horizontal.

Supposons que le centre de gravité soit excentré d'une distance d et qu'il soit placé à l'instant initial comme l'indique la figure. Sous l'action du poids P le volant va tourner et, après une série d'oscillations, s'arrêtera. Dans la position de repos, le point G est le plus bas possible sur la verticale du point O (fig. 7) et l'on peut tracer cette ligne sur la pièce.

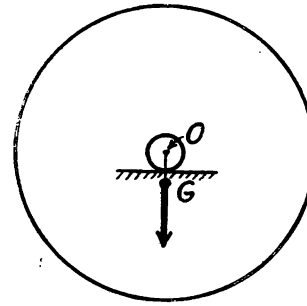


Fig. 7. — Le centre de gravité G du volant se place le plus bas possible. Il faudra placer un contrepoids sur la ligne OG. De quel côté?

Le problème revient à déterminer la distance $OC = x$ à laquelle il faut placer une surcharge de poids pour équilibrer la force centrifuge, ce qui conduit à la relation :

$$\frac{P}{g} \times \omega^2 \times d = \frac{p}{g} \times \omega^2 \times x$$

d'où : $P \times d = p \times x$.

$$x = \frac{P \times d}{p}.$$

Remarque. — En réalité, on ne connaît pas la distance d. Il faut donc opérer par tâtonnements pour placer la surcharge p, de telle sorte que les moments des forces P et p soient égaux et de signes contraires.

En pratique, on enlève de la matière du côté du balourd ou on creuse des cavités qu'on remplit de plomb dans la région opposée. Plusieurs essais sont nécessaires pour réaliser l'équilibre. L'opération terminée, le volant est en équilibre indifférent pour toutes les positions qu'il occupe. Son centre de gravité est alors sur l'axe de rotation.

2° ***Équilibrage d'un vilebrequin à un maneton*** (fig. 8) :

La masse équilibrante est constituée par deux poids égaux p, tels que la résultante des forces centrifuges qui les sollicitent soit égale et opposée à la force centrifuge qui s'exerce sur le balourd.

Comme précédemment :

$$2 \times \frac{p}{g} \times \omega^2 \times x = \frac{P}{g} \times \omega^2 \times d.$$

L'équilibrage s'obtient par essais successifs. On a soin de prévoir des masses supérieures à celles

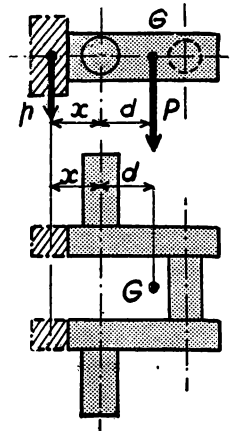


Fig. 8. — Voyez comment on dispose les masses d'équilibrage sur un vilebrequin à un coude.

qui correspondent à l'équilibre et on enlève progressivement sur chacune d'elles des quantités égales de matière.

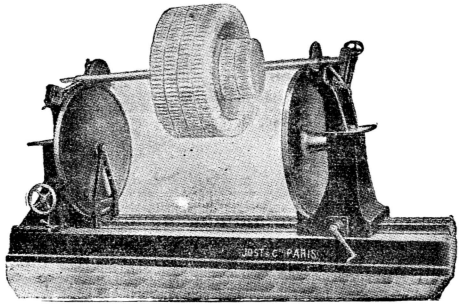


Fig. 9. — *Machine Jost pour l'équilibrage statique.* — L'arbre du corps à équilibrer (ici un induit de dynamo), est posé sur des disques en acier dur très mobiles.

REMARQUE. — L'opération qui consiste à placer le centre de gravité d'un corps tournant sur l'axe de rotation s'appelle ***équilibrage statique***. Diverses machines ont été établies à cet effet : la figure 9 représente l'une d'elles.

4. Équilibrage d'un corps où les actions centrifuges se réduisent à un couple : équilibrage dynamique.

Nous avons vu que, bien que le centre de gravité du corps soit sur l'axe de rotation, les actions centrifuges pouvaient donner lieu à un couple (fig. 2). Celui-ci détermine

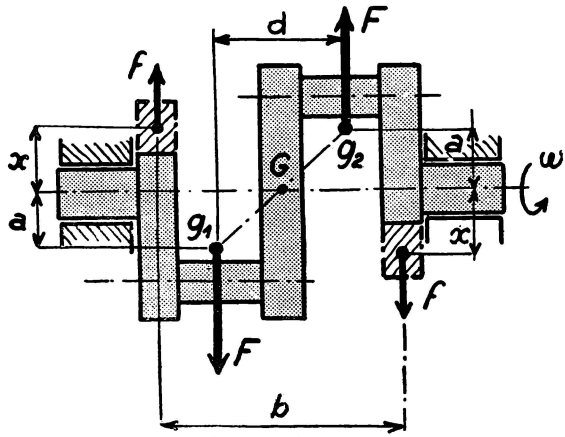


Fig. 10. — Voici un vilebrequin à deux coudes.
Justifiez la position des masses d'équilibrage (parties hachurées).

des poussées supplémentaires dans les paliers et il est à l'origine de vibrations parfois dangereuses.

L'équilibrage statique est donc insuffisant. Il faut, pour neutraliser les effets du couple *qui ne prend naissance qu'avec la rotation*, procéder à ***l'équilibrage dynamique.***

Ainsi sur la figure 10 les masses d'équilibrage égales sont placées symétriquement par rapport à G.

Pour que l'équilibre dynamique soit réalisé il faut que :

$$f \times b = F \times d.$$

Or $\begin{cases} F = \dfrac{P}{g} \times \omega^2 \times a & (P : \text{poids de chaque coude}) \\ f = \dfrac{p}{g} \times \omega^2 \times x. & (p : \text{poids équilibreur}) \end{cases}$

Par suite :

$$\frac{p}{g} \omega^2 x \times b = \frac{P}{g} \omega^2 a \times d.$$

D'où :

$$p \times x \times b = P \times a \times d$$

Dans l'industrie, l'équilibrage dynamique est obtenu à l'aide de machines spéciales ou équilibreuses. Elles permettent de déterminer rapidement la valeur du couple des actions centrifuges et de remédier à ses effets par un choix judicieux des masses d'équilibrage.

La figure 11 représente l'une de ces machines employées dans le cas de pièces longues et de forte masse.

En général, pour les pièces longues de faible masse, on se contente d'un équilibrage statique (petits induits de moteur électrique par exemple).

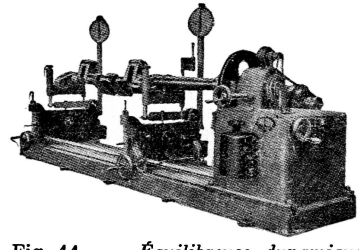


Fig. 11. — *Équilibreuse dynamique Trébel.* On va procéder à l'équilibrage d'un vilebrequin de moteur à explosions.

Résumé.

1. Les actions centrifuges sur un corps tournant peuvent se réduire :
à une force unique F,
à un couple,
à une force F et à un couple.

De toute manière, il est nécessaire de prévoir l'équilibrage d'un corps tournant à grande vitesse, car la matière qui le constitue n'est pas toujours homogène ou répartie symétriquement autour de l'axe de rotation.

2. L'*équilibrage statique* a pour but d'amener le centre de gravité du corps sur l'axe de rotation.
L'*équilibrage dynamique* remédie aux effets du couple dû aux actions centrifuges.

Le premier suffit dans le cas de pièces de faible épaisseur par rapport au diamètre, ou de pièces longues mais de faible masse. Le second s'impose dans le cas de pièces longues et de grande masse.

Exercices.

1. Les roues motrices d'une locomotive portent à la jante un contrepoids (fig. 12). A quoi sert-il? Justifier sa position.

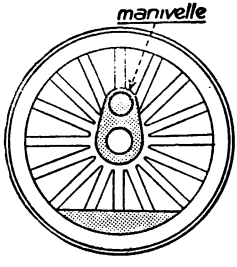


Fig. 12.

2. Pourquoi faut-il équilibrer les hélices d'avion? Un équilibrage dynamique est-il nécessaire?

3. Lors de l'établissement d'un volant, on recommande de disposer symétriquement la matière autour de l'axe de rotation. En particulier justifier :

a) le nombre pair de bras,

b) l'épaisseur constante de la jante.

Que se passerait-il si l'on établissait un volant à 5 bras?

4. Sur un plateau de tour, une pièce en cours d'usinage est maintenue par une console (voir fig. 13). Le plateau tourne à raison de 90 *tours par minute.*

a) Quelle est la valeur de la force centrifuge qui le sollicite sachant que le poids de la pièce, appliqué en G, est de 20 *kgp?*

b) Choisir un contrepoids d'équilibrage et déterminer son emplacement.

5. Un disque de fonte de diamètre 400 *mm* et d'épaisseur 40 *mm* est destiné à servir de volant. Il accuse un balourd. Pour l'équilibrer on a percé un trou de 6 *mm* de diamètre, dont le centre est à 100 *mm* de l'axe de rotation.

Quel est le moment du balourd par rapport à l'axe?

Sur quel rayon se trouve t-il?

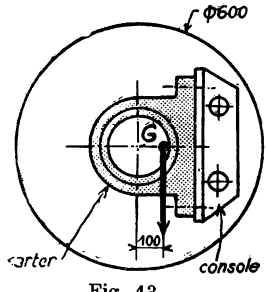


Fig. 13.

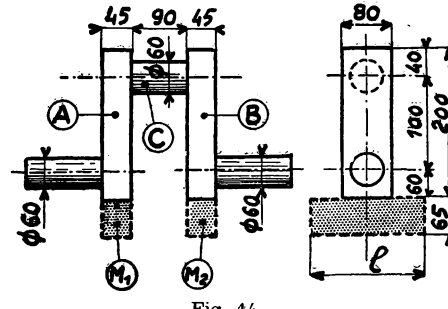


Fig. 14.

6. En se reportant aux cotes et indications de la figure 14 :

1° Déterminer le centre de gravité de l'ensemble des parties A, B, C.

2° Trouver la longueur *l* des deux masses égales d'équilibrage M_1 et M_2.

Métal employé : Acier de densité 7,8.

Table des matières

CINÉMATIQUE

Pages.

1e leçon. — Généralités 5

2e leçon. — Mouvement rectiligne uniforme d'un point 13

3e leçon. — Application des diagrammes du mouvement uniforme 21

4e leçon. — Mouvement rectiligne uniformément accéléré. — (*Etude expérimentale*) 28

5e leçon. — Mouvement rectiligne uniformément accéléré (*sans vitesse initiale*) 35

6e leçon. — Mouvement rectiligne uniformément accéléré (*avec vitesse initiale*) 43

7e leçon. — Mouvement rectiligne uniformément retardé 49

8e leçon. — Application des lois du mouvement uniformément varié à la chute des corps 56

COMPLÉMENT. — Généralisation des formules du mouvement uniformément varié 65

9e leçon. — Mouvement circulaire uniforme d'un point 69

10e leçon. — Mouvement rectiligne sinusoïdal 77

11e leçon. — Mouvement quelconque d'un point 85

12e leçon. — Hodographe d'un mouvement uniformément varié 93

13e leçon. — Hodographe d'un mouvement quelconque. Composantes normale et tangentielle de l'accélération 98

14e leçon. — Composition de deux mouvements rectilignes uniformes 108

15e leçon. — Composition de deux mouvements. Mouvement parabolique. Mouvement hélicoïdal 115

16e leçon. — Cinématique du corps solide 123

NOTE SUR LA MESURE DE LA VITESSE ET DE L'ACCÉLÉRATION 133

STATIQUE

Pages.

17e leçon. — Notion de force. Représentation vectorielle d'une force..... 139
18e leçon. — Principes de la Statique..... 147
19e leçon. — Résultante de deux forces concourantes..... 154
20e leçon. — Décomposition d'une force en deux autres concourantes. Résultante de plusieurs forces concourantes..... 159
21e leçon. — Résultante de deux forces parallèles et de même sens..... 166
22e leçon. — Résultante de deux forces parallèles et de sens contraires..... 172
23e leçon. — Couple. Moment d'un couple 177
24e leçon. — Résultante d'un système de forces parallèles. Centre des forces parallèles..... 184
25e leçon. — Moment d'une force par rapport à un point..... 189
26e leçon. — Moment d'une force par rapport à un axe ou à un plan..... 198
27e leçon. — Composition des couples..... 205
28e leçon. — Réduction des forces appliquées à un solide..... 211
29e leçon. — Centre de gravité d'un corps solide..... 217
30e leçon. — Détermination du centre de gravité par le calcul..... 225
31e leçon. — Théorèmes de Guldin..... 233
32e leçon. — Equilibre d'un point matériel ou d'un corps solide..... 239
COMPLÉMENT — Equations d'équilibre d'un corps solide..... 248
33e leçon. — Equilibre d'un corps solide sous la seule action de son poids. 253
34e leçon. — Machines simples : leviers..... 260
35e leçon. — Machines simples : balances et bascules..... 268
36e leçon. — Machines simples : poulies, palans, treuils, grues..... 278
37e leçon. — Machines simples : plan incliné, vis, coin, clavettes..... 286

DYNAMIQUE

38e leçon. — Principe de la conservation du mouvement ou principe de l'inertie..... 295
39e leçon. — Loi fondamentale de la Dynamique : $F = M\gamma$..... 301
40e leçon. — Effet d'un couple moteur constant sur un corps mobile autour d'un axe. Moment d'inertie..... 310
41e leçon. — Travail mécanique..... 317

Pages.

42e leçon. — Travail de la résultante d'un système de forces. Puissance..... 324

43e leçon. — Systèmes d'unités..... 331

44e leçon. — Energie cinétique d'un point matériel et d'un corps solide..... 342

45e leçon. — Théorème de l'énergie cinétique..... 349

46e leçon. — Transmission du travail dans les machines simples. Conservation du travail..... 357

47e leçon. — Théorème des travaux virtuels. Application à l'équilibre des machines simples..... 365

48e leçon. — Force centrifuge. Son expression..... 372

49e leçon. — Quelques applications de la force centrifuge..... 378

50e leçon. — Equilibrage des corps tournants..... 384

EMM. GRÉVIN ET FILS — IMPRIMERIE DE LAGNY (C. O. 31.1245) — 7-1946.
Dépôt légal : 2e trimestre 1946. — Dépôt antérieur : 3-9-38.
N° d'Édition : 349. — N° d'Impression : 1013.

Librairie DELAGRAVE
15, Rue Soufflot - Paris (v^e)

Électricité industrielle,
Courants continus,
par Pastouriaux, Varoquaux et Bellier.
Courants alternatifs,
par Pastouriaux et Varoquaux.
Mesures et Essais électriques,
par les mêmes.
Trois volumes grand in. 16, illustrés, cartonnés.

Arithmétique et Notions d'Algèbre, par R. Cluzel et H. Court.

Algèbre, par R. Cluzel et H. Court.
Deux volumes grand in. 16, illustrés, cartonnés.

Précis analytique de correspondance commerciale, par A. Holveck.
Un volume grand in. 16, cartonné.

A Practical English Course, par G. Nigot et R. Lemoine.
The first year book. — Un volume grand in. 16, illustré.
The second year boak. — Un volume grand in. 16 illustré.

Die Deutsche Handelsprache, par J. Graff.
Méthode pratique d'enseignement de la Langue Commerciale Allemande.
Un volune in. 8, carré cartonné.

IMP. CH. BERNARD. 27 RUE DES CLOYS. PARIS.